Anno Accademico 2002/2003

Calcolo Numerico - Geocalcolo

Prova d'esame del 20/2/2003

cognome Pestalozzi **nome** Bartolomeo **matricola** 61mn

NB: I calcoli in tutti gli esercizi vanno eseguiti con almeno 4 cifre decimali.
NB: Gli angoli delle funzioni trigonometriche sono SEMPRE in radianti.
NB: Il logaritmo è sempre quello naturale.

- **Chi sostiene l'esame di Geocalcolo deve risolvere 2 esercizi a scelta della prima parte e 1 della seconda.**
- **Chi sostiene l'esame di Calcolo Numerico deve risolvere 3 esercizi a scelta della prima parte.**

Letto e compreso

Firma:...

PARTE PRIMA

Esercizio 1:

Dato il seguente integrale $\int_a^b f(x)dx$ dove $a = -\pi/2,\ b = \pi/2,\ f(x) = x^2 \cos x + \sin 2x$ calcolare:

1. Il numero di intervalli affinche il metodo di Simpson approssimi l'integrale con un errore inferiore a 10^{-5}.
1. Il valore dell'integrale calcolato con il metodo di Simpson e 6 intervalli.

(1) $f^{(4)}(x) = (x^2 - 12)\cos x + 8x\sin x + 16\sin 2x$ $n \geq 16$	(2) .9313

Esercizio 2:

Dalla la seguente equazione differenziale: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_a \end{cases}$ dove $f(x,y) = x^2 - 3y$, $a = 1,\ y_a = 2$

1. Scrivere lo schema di Collatz per questa *particolare equazione.*
1. Calcolare 3 passi del metodo con passo $h = 0.2$.

(1)	$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} y_{k+1/2} = y_k + \dfrac{h}{2}(x_k^2 - 3y_k) \\ y_{k+1} = y_k + h(x_{k+1/2}^2 - 3y_{k+1/2}) \end{cases}$	
(2)	$y_{1/2} = 1.5,$ $y_1 = 1.342,$	$y_{3/2} = 1.0834,$ $y_2 = 1.02996,$	$y_{5/2} = 0.916972,$ $y_3 = 0.9297768,$

Esercizio 3:

Data la seguente equazione differenziale: $\begin{cases} y''+py'+qy=r \\ y(a)=y_a \quad y(b)=y_b \end{cases}$ dove $a=1,\ b=3$ e $p(x)=x-2$, $q(x)=-2$, $r(x)=-3x$, $y_a=2,\ y_b=8$

1. Scrivere lo schema alle *differenze centrate* per questa particolare equazione.
1. Scrivere il sistema lineare risultante quando l'intervallo $[a,b]$ viene diviso in 4 parti.
1. risolvere il sistema lineare e scrivere la soluzione approssimata.

(1)	$x_k = 1+hk,\quad h=\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+(x_k-2)\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}-2y_k=-3x_k$
(2)	$\begin{bmatrix} -5 & \frac{7}{4} & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 0 & \frac{7}{4} & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{27}{4} \\ -3 \\ -\frac{87}{4} \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} -5 & 1.75 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1.75 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6.75 \\ -3 \\ -21.75 \end{bmatrix}$
(3)	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.75 \\ 4 \\ 5.75 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ 4 \\ \frac{23}{4} \end{bmatrix}$

Esercizio 4:

Dato il seguente integrale $\int_a^b f(x)dx$ dove $a=0,\ b=3,\ f(x)=x^2\cos x+\sin 2x$ calcolare:

1. L'integrale approssimato applicando 2 volte le formule di Gauss-Legendre con 3 punti per gli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ dove $c=2$. Si ricorda che i pesi e i nodi per le formule di Gauss-Legendre sono: $\begin{array}{c|ccc} x_k & -0.7746 & 0 & 0.7746 \\ \hline w_k & 0.5555 & 0.8888 & 0.5555 \end{array}$
1. Scrivere le coordinate Gaussiane e i pesi per gli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$

(1)	-4.928788625=.9836604126+(-5.912449038)
(2)	$[a,c]:=\begin{array}{c\|ccc} x_k & 0.2254 & 1 & 1.7746 \\ \hline w_k & 0.5555 & 0.8888 & 0.5555 \end{array}$ $\qquad [c,b]:=\begin{array}{c\|ccc} x_k & 2.1127 & 2.5 & 2.8873 \\ \hline w_k & 0.27775 & 0.4444 & 0.27775 \end{array}$

Esercizio 5:

Dato il seguente sistema lineare: $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$

1. Scrivere lo schema di Gauss-Seidel per *questo particolare sistema.*
1. Calcolare due iterate dello schema a partire da $x_0=1,\ y_0=0,\ z_0=1,$ e calcolare inoltre i **residui** nelle norme $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$ e $\|\bullet\|_\infty$.
1. Stimare il raggio spettrale della matrice di iterazione e dire se lo schema converge.

(1)	$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{-1 + y_k + z_k}{4} \\ y_{k+1} = \dfrac{3 + 2x_{k+1} + z_k}{4} \\ z_{k+1} = \dfrac{5 + x_{k+1} + y_{k+1}}{2} \end{cases}$
(2)	$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1.875 \\ 3.8125 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -1.6875 \\ -0.8125 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Vert \mathbf{r}_1 \Vert_1 = 5$, $\Vert \mathbf{r}_1 \Vert_2 = 3.61$, $\Vert \mathbf{r}_1 \Vert_\infty = 3$ $\Vert \mathbf{r}_2 \Vert_1 = 2.5$, $\Vert \mathbf{r}_2 \Vert_2 = 1.8729$, $\Vert \mathbf{r}_2 \Vert_\infty = 1.6875$
(3)	matrice di iterazione $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$ autovalori $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{16}$ quindo il raggio spettrale è < 1 e lo schema converge.

Esercizio 6:

Data la funzione $f(x) = x - 10\exp(-x)$

1. Scrivere lo schema di Newton-Raphson per questa particolare funzione.
2. Scrivere lo schema delle secanti per questa particolare funzione.
3. Calcolare tre iterate dello schema di Newton-Raphson a partire da $x_0 = 1$.
4. Calcolare due iterate dello schema delle a partire da $x_0 = 1,\ x_1 = 2$.

(1)	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - 10\exp(-x_k)}{1 + 10\exp(-x_k)}$		
(2)	$x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - 10\exp(-x_k)}{1 - 10\dfrac{\exp(-x_k) - \exp(-x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$		
(3)	$x_0 = 1$ $x_1 = 1.5725$ $x_2 = 1.736$ $x_3 = 1.7455$	(4)	$x_0 = 1$ $x_1 = 2$ $x_2 = 1.8055$ $x_3 = 1.7407$

Esercizio 7:

Data la seguente tabella di punti:

x	-2	-1	-1	0	2	1	3	-3	2	5
y	5	2	2	1	5	2	10	10	5	26

1. Scrivere il sistema lineare associato al problema della approssimazione parabolica ai minimi quadrati.
2. Calcolare la parabola ai minimi quadrati

(1)	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 58 \\ 6 & 58 & 132 \\ 58 & 132 & 838 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 68 \\ 138 \\ 896 \end{bmatrix}$
(2)	$p(x) = x^2 + 1$

PARTE SECONDA

Esercizio 8:

Dati i seguenti 2 punti sul piano $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e la retta $r : x + y + 1 = 0$:

1. Calcolare il cerchio passante per $\mathbf{p}$ e tangente alla retta r.
2. Calcolare (se esistono e in caso contrario spiegare perche) le rette passati per $\mathbf{q}$ e tangenti al cerchio.

(1)
(2)

Esercizio 9:

Data la seguente conica: $x^2 + y^2 + 2xy + 1 = 0$

1. Classificare la conica
2. Scrivere la conica in forma canonica e scrivere la rototraslazione che pone la conica in forma canonica.

(1)
(2)