Anno Accademico 2002/2003

Calcolo Numerico - Geocalcolo

Prova d'esame del 16/06/2003

cognome Pestalozzi **nome** Bartolomeo **matricola** 61mn

LEGGERE ATTENTAMENTE

NB: I calcoli in tutti gli esercizi vanno eseguiti con almeno 4 cifre decimali.

NB: Gli angoli delle funzioni trigonometriche sono SEMPRE in radianti.

NB: Il logaritmo è sempre quello naturale.

- **Chi sostiene l'esame di Geocalcolo deve risolvere almeno 2 esercizi a scelta della prima parte e 1 della seconda.**
- **Chi sostiene l'esame di Calcolo Numerico deve risolvere almento 3 esercizi a scelta della prima parte.**

Per ogni esercizio è segnato il punteggio massimo raggiungibile nel caso il candidato svolga perfettamante ordinatamente e senza errori lo stesso.

Letto e compreso

Firma:……………………………………………..

PARTE PRIMA

Esercizio 1: (12) Dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ -16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

calcolare:

1. La decomposizione LU (con pivoting) della matrice del sistema e il vettore della permutazione.
2. Calcolare la soluzione del sistema lineare tramite la decomposizione LU precedentemente calcolata.
3. Calcolare la soluzione del sistema lineare con la stessa matrice dei coefficienti e come termine noto il vettore $\mathbf{b} = [0,\ 8,\ 2,\ -4]^T$

(1)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathbf{x} = [1,\ -2,\ 3,\ -4]^T$	(2) $\mathbf{x} = [1,\ 0,\ -1,\ 0]^T$

Esercizio 2: (6) Data la funzione $f(x) = x - \exp(1-x)$

1. Scrivere lo schema di Newton-Raphson per questa particolare funzione.
2. Scrivere lo schema delle secanti per questa particolare funzione.
3. Calcolare tre iterate dello schema di Newton-Raphson a partire da $x_0 = 2$.
4. Calcolare due iterate dello schema delle a partire da $x_0 = -1,\ x_1 = 0$.

(1) $$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \exp(1-x_n)}{1+\exp(1-x_n)} = (x_n+1)\frac{\exp(1-x_n)}{1+\exp(1-x_n)}$$

(2) $$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}\left(x_n - \exp(1-x_n)\right) - x_n\left(x_{n-1} - \exp(1-x_{n-1})\right)}{x_n - \exp(1-x_n) - x_{n-1} + \exp(1-x_{n-1})} = \frac{x_n \exp(1-x_{n-1}) - x_{n-1}\exp(1-x_n)}{x_n - x_{n-1} + \exp(1-x_{n-1}) - \exp(1-x_n)}$$

(3) $x_0 = 2$ $x_1 = 0.8068242642$ $x_2 = 0.9904004407$ $x_3 = 0.9999769258$	(4) $x_0 = -1$ $x_1 = 0$ $x_2 = 0.4793493266$ $x_3 = 0.8603493429$

Esercizio 3: (7) Data la seguente tabella di punti:

x	0	1	2	−1	−2
y	1	1	15	3	19

1. Calcolare il polinomio interpolante con il metodo delle differenze divise di Newton.
2. Scrivere i polinomi $w_k(x)$ per la costruzione del polinomio interpolante
3. Scrivere la tabella delle differenze divise.

(1) $p(x) = x^4 - x + 1$	(2) $w_1(x) = 1$ $w_2(x) = x^2 - x$ $w_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $w_4(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x$

(3)

x	$f(x)$				
0	1				
		0			
1	1		7		
		14		2	
2	15		5		1
		4		0	
−1	3		5		
		−16			
−2	19				

Esercizio 4: (8) Dato il seguente integrale:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{dove} \quad a = -\pi,\ b = \pi,\ f(x) = \cos(x)\exp(-x)$$

calcolare:

1. La stima del modulo della derivata quarta di $f(x)$.
2. Il numero di intervalli affinche il metodo di Simpson approssimi l'integrale con un errore inferiore a 10^{-5}.

3. Il valore dell'integrale calcolato con il metodo di Simpson e 6 intervalli.

(1) $f^{(4)}(x) = -4\cos(x)\exp(-x)$ da cui $\left\|f^{(4)}(x)\right\| \le 4\left\|\exp(-x)\right\|$ e quindi per $x \in [-\pi,\pi]$ la stima è $\left\|f^{(4)}(x)\right\| \le 4\left\|\exp(\pi)\right\| \le 92.57$	
(2) $n \geq 149.81$ quindi $n = 150$	(3) -11.61686655

Esercizio 5: (8) Dalla la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_a \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad f(x,y) = x - xy,\ a = 1,\ y_a = 2$$

1. Scrivere lo schema basato sullo svilippo di Taylor fino al terzo ordine per questa *particolare equazione.*
2. Calcolare 3 passi del metodo con passo $h = 0.2$.

(1)

$$\begin{aligned} y'(x) &= x(1-y(x)) \\ y''(x) &= (1-x^2)(1-y(x)) \\ y'''(x) &= (x^3-3x)(1-y(x)) \end{aligned} \qquad y_{k+1} = y_k + h(1-y_k)\left[x_k + \frac{h}{2}(1-x_k^2) + \frac{h^2}{6}(x_k^3-3x_k)\right]$$

(2)

k	x	y
0	1	2
1	1.2	1.8027
2	1.4	1.6191
3	1.6	1.4588

Esercizio 6: (10) Data la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y'' + py' + qy = r \\ y(a) = y_a \quad y(b) = y_b \end{cases} \quad \text{dove } a = -1,\ b = 3 \text{ e } p(x) = x-1,\ q(x) = -1,\ r(x) = -2,\ y_a = 0,\ y_b = 4$$

1. Scrivere lo schema *upwind* per questa particolare equazione.
2. Scrivere il sistema lineare risultante quando l'intervallo $[a,b]$ viene diviso in 4 parti.
3. risolvere il sistema lineare e scrivere la soluzione approssimata.

(1)

$$\begin{cases} -4y_1 + y_2 = -2 \\ y_1 - 3y_2 + y_3 = -2 \\ y_2 - 4y_3 = -10 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

(3) $y_1 = 1,\quad y_2 = 2,\quad y_3 = 3,$

Esercizio 7: (6) Dato il seguente integrale:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{dove } a = -1,\ b = 2,\ f(x) = x + x^2$$

calcolare:

1. L'integrale approssimato applicando 2 volte le formule di Gauss-Legendre con 3 punti per gli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ dove $c=0$. Si ricorda che i pesi e i nodi per le formule di Gauss-Legendre sono:

x_k	-0.7746	0	0.7746
w_k	0.5555	0.8888	0.5555

2. Scrivere le coordinate Gaussiane e i pesi per gli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$

(1)
(2)

Esercizio 8: (10) Dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Scrivere lo schema di Gauss-Seidel per *questo particolare sistema.*
2. Calcolare due iterate dello schema a partire da $x_0=-1,\ y_0=0,\ z_0=1,$ e calcolare inoltre i **residui** nelle norme $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$ e $\|\bullet\|_\infty$.
3. Stimare il raggio spettrale della matrice di iterazione e dire se lo schema converge.

(1)

$$x_{k+1}=\frac{1+y_k}{2}\qquad y_{k+1}=\frac{x_{k+1}+z_k}{2}\qquad z_{k+1}=\frac{2+x_{k+1}+y_{k+1}}{2}$$

(2)

$$x_1=\frac{1+y_0}{2}=\frac{1+0}{2}\qquad x_2=\frac{1+y_1}{2}=\frac{1+3/4}{2}=\frac{7}{8}$$

$$y_1=\frac{x_1+z_0}{2}=\frac{1/2+1}{2}=\frac{3}{4}\qquad y_2=\frac{x_2+z_1}{2}=\frac{7/8+13/8}{2}=\frac{5}{4}$$

$$z_1=\frac{2+x_1+y_1}{2}=\frac{2+1/2+3/4}{2}=\frac{13}{8}\qquad z_2=\frac{2+x_2+y_2}{2}=\frac{2+7/8+5/4}{2}=\frac{25}{16}$$

$$\mathbf{r}_2=\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/16 \\ -3/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.0625 \\ -0.75 \end{pmatrix}\qquad \|\mathbf{r}_1\|_1=1.3125,\quad \|\mathbf{r}_1\|_\infty=0.75,\quad \|\mathbf{r}_1\|_2=0.90355$$

(3) $(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}=\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 1/8 & -1/4 \end{pmatrix}$ autovalori: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\frac{-1+i}{4},\ \lambda_3=\frac{-1-i}{4},$ quindi il raggio spettrale è $\frac{1}{2\sqrt{2}}<1$ quindi converge

Esercizio 9: (6) Data la seguente tabella di punti:

x	-2	-2	-1	0	2	1	3	-3	2	5
y	-1	-1	0	1	3	2	4	-2	3	6

1. Scrivere il sistema lineare associato al problema della approssimazione parabolica ai minimi quadrati.
2. Calcolare la parabola ai minimi quadrati

(1)

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
-2	-1	4	-8	16	2	-4
-2	-1	4	-8	16	2	-4
-1	0	1	-1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
2	3	4	8	16	6	12
1	2	1	1	1	2	2
3	4	9	27	81	12	36
-3	-2	9	-27	81	6	-18
2	3	4	8	16	6	12
5	6	25	125	625	30	150
5	15	61	125	853	66	186

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 61 \\ 5 & 61 & 125 \\ 61 & 125 & 853 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 66 \\ 186 \end{pmatrix}$$

(2) $a = 1,\ b = 1,\ c = 0, \qquad p(x) = 1 + x.$

PARTE SECONDA

Esercizio 10: (8) Dati i seguenti 3 punti sul piano $\mathbf{p}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{q}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$, $\mathbf{r}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$

1. Calcolare la retta R passante per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$.
2. Calcolare la retta Q passate per $\mathbf{r}$ e ortogonale a R
3. Calcolare il cerchio passante per $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$.

(1)	(2)
(3)	

Esercizio 11: (12) Data la seguente conica: $x^2 - y^2 + 2xy + 1 = 0$

1. Classificare la conica
2. Scrivere la conica in forma canonica e scrivere la rototraslazione che pone la conica in forma canonica.

(1)
(2)