Anno Accademico 2002/2003

Calcolo Numerico

Prova d'esame del 29/07/2003

Cognome		**nome**		**matricola**	

- **I calcoli in tutti gli esercizi vanno eseguiti con almeno 4 cifre decimali.**
- **Gli angoli delle funzioni trigonometriche sono SEMPRE in radianti.**
- **Il logaritmo è SEMPRE quello naturale.**
- **Per ogni esercizio è segnato il punteggio massimo raggiungibile qualora il candidato svolga ordinatamente e senza errori lo stesso.**

Letto e compreso

Firma:………………………………………………..

Esercizio 1: (12) Dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 11 & 48 \\ 12 & -24 & -36 & -48 \\ -6 & 24 & -6 & -12 \\ -4 & 2 & 36 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -48 \\ 12 \\ 34 \end{bmatrix}$$

calcolare:

1. La decomposizione LU con pivoting della matrice del sistema e il vettore della permutazione.
2. La soluzione del sistema lineare tramite la decomposizione LU precedentemente calcolata.
3. La soluzione del sistema lineare con la stessa matrice dei coefficienti e come termine noto il vettore $\mathbf{b} = [168,\ -240,\ -24,\ 104]^T$

(1)	
(2)	(3)

Esercizio 2: (6) Data la funzione $f(x) = x - \dfrac{1}{1+x^2}$

1. Scrivere lo schema di Newton-Raphson per questa particolare funzione.
2. Scrivere lo schema delle secanti per questa particolare funzione.
3. Calcolare tre iterate dello schema di Newton-Raphson a partire da $x_0 = 1$.
4. Calcolare due iterate dello schema delle a partire da $x_0 = 1,\ x_1 = 2$.

(1)

(2)

(3)

(4)

Esercizio 3: (7) Data la seguente tabella di punti:

x	0	1	2	-1	-2
y	1	3	7	1	3

1. Calcolare il polinomio interpolante con il metodo delle differenze divise di Newton.
2. Scrivere i polinomi $w_k(x)$ per la costruzione del polinomio interpolante
3. Scrivere la tabella delle differenze divise.

(1)

(2)

(3)

x	$f(x)$
0	1
1	3
2	7
-1	1
-2	3

Esercizio 4: (8) Dato il seguente integrale:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ dove } a = -1,\ b = 2,\ f(x) = (1+x^2)\cos(2x)$$

calcolare:

1. La stima del modulo della derivata seconda di $f(x)$.
2. Il numero di intervalli affinché l'errore ottenuto con il metodo dei **trapezi** sia inferiore a 10^{-5}.
3. Il valore dell'integrale calcolato con il metodo dei **trapezi** e 6 intervalli.

(1)

(2)

(3)

Esercizio 5: (8) Dalla la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_a \end{cases} \quad \text{dove} \quad f(x,y) = x^2 - 3y,\ a = 1,\ y_a = 2$$

1. Scrivere lo schema basato sullo sviluppo di Taylor fino al terzo ordine per questa *particolare equazione.*
2. Calcolare 3 passi del metodo con passo $h = 0.2$.

(1)

(2)

Esercizio 6: (10) Data la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} y''+py'+qy = r \\ y(a) = y_a \quad y(b) = y_b \end{cases}$$ dove $a = -1,\ b = 3$ e $p(x) = x - 1,\ q(x) = -1,\ r(x) = x^2 - 2x,\ y_a = 1,\ y_b = 13$

1. Scrivere lo schema *alle diffenze centrate* per questa particolare equazione.
2. Scrivere il sistema lineare risultante quando l'intervallo $[a,b]$ viene diviso in 4 parti.
3. risolvere il sistema lineare e scrivere la soluzione approssimata.

(1)

(2)

(3)

Esercizio 7: (6) Dato il seguente integrale:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ dove } a = -1,\ b = 3,\ f(x) = 1 + x^2$$

calcolare:

1. L'integrale approssimato applicando 2 volte le formule di Gauss-Legendre con 3 punti per gli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ dove $c = 1$. Si ricorda che i pesi e i nodi per le formule di Gauss-Legendre sono:

x_k	-0.7746	0	0.7746
w_k	0.5555	0.8888	0.5555

2. Scrivere le coordinate Gaussiane e i pesi per gli intervalli $[a,c]$ e $[c,b]$

(1)

(2)

Esercizio 8: (10) Dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. Scrivere lo schema di Gauss-Seidel per *questo particolare sistema.*
2. Calcolare due iterate dello schema a partire da $x_0 = 2,\ y_0 = 1,\ z_0 = 2,$ e calcolare inoltre i **residui** nelle norme $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$ e $\|\bullet\|_\infty$.
3. Stimare il raggio spettrale della matrice di iterazione e dire se lo schema converge.

(1)

(2)

(3)

Esercizio 9: (6) Data la seguente tabella di punti:

x	−2	−2	−1	0	2	1	3	−3	2	5
y	−1	−1	0	1	3	2	4	−2	3	6

1. Scrivere il sistema lineare associato al problema della approssimazione parabolica ai minimi quadrati.
2. Calcolare la parabola ai minimi quadrati

(1)

(2)