

Calcolo Numerico - Prova d'esame del 10/10/2003

Cognome nome matricola

- I calcoli in tutti gli esercizi vanno eseguiti con almeno 4 cifre decimali.
- Gli angoli delle funzioni trigonometriche sono SEMPRE in radianti.
- Il logaritmo è sempre quello naturale.
- Per ogni esercizio è segnato il punteggio massimo raggiungibile qualora il candidato svolga ordinatamente e senza errori lo stesso.

Letto e compreso

Firma:.....

Esercizio 1: (12) Dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + 7y + 4z = 25 \\ 4x + 10y + 2z = 34 \\ 6x + 6y + 6z = 12 \\ 2x + 12y + 12z = 72 \end{cases}$$

calcolare:

1. La decomposizione LU con pivoting della matrice del sistema e il vettore della permutazione.
2. La soluzione del sistema lineare tramite la decomposizione LU precedentemente calcolata.
3. La soluzione del sistema lineare con la stessa matrice dei coefficienti e come termine noto il vettore $\mathbf{b} = [3, 8, 12, 0]^T$

(1)	
(2)	(3)

Esercizio 2: (7) Data la seguente tabella di punti:

x	2	1	0	2	3
y	15	0	1	15	80

1. Calcolare il polinomio interpolante con il metodo delle differenze divise di Newton.
2. Scrivere i polinomi $w_k(x) = \prod_{i=1}^{k-1} (x - x_i)$ per la costruzione del polinomio interpolante
3. Scrivere la tabella delle differenze divise.

(1)	(2)												
<p>(3)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left; padding: 5px;">x</th> <th style="text-align: left; padding: 5px;">$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">$\sqrt{2}$</td> <td style="padding: 5px;">15</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\sqrt{1}$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$\sqrt{1}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">15</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">80</td> </tr> </tbody> </table>		x	$f(x)$	$\sqrt{2}$	15	$\sqrt{1}$	0	0	$\sqrt{1}$	2	15	3	80
x	$f(x)$												
$\sqrt{2}$	15												
$\sqrt{1}$	0												
0	$\sqrt{1}$												
2	15												
3	80												

Esercizio 3: (9) Dato il seguente integrale:

$$\int_a^b f(x) dx \text{ dove } a = 0, b = 2, f(x) = (1 + x^2) \cos(x/2)$$

calcolare:

1. La stima del modulo della derivata seconda di $f(x)$.
2. Il numero di intervalli affinché l'errore ottenuto con il metodo di **Simpson** sia inferiore a 10^{-5} .
3. Il valore dell'integrale calcolato con il metodo di **Simpson** e 6 intervalli.

(1)	(2)
(3)	

Esercizio 4: (10) Dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Scrivere lo schema di Gauss-Seidel per *questo particolare sistema*.
2. Calcolare due iterate dello schema a partire da $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $z_0 = 2$, e calcolare inoltre i **residui** nelle norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.
3. Stimare il raggio spettrale della matrice di iterazione e dire se lo schema converge.

(1)
(2)
(3)