Calcolo Numerico (Ing. Industriale) - 5 luglio 2011 - A

COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

Esercizio 1

Data la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

i) calcolare la fattorizzazione di LU (con pivoting) di $\boldsymbol{A}$;

ii) usando la fattorizzazione LU di $\boldsymbol{A}$ risolvere il sistema lineare

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ e lo *splitting* $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}$ dove

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ii) Scrivere esplicitamente ($x^{k+1} = ...$, $y^{k+1} = ...$) il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^k)$$

i) Studiare la convergenza del metodo iterativo;

iii) Partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni.

Esercizio 3

Dato il seguente sistema non lineare

$$e^x - e^y = 0, \qquad x\,y - 1 = 0$$

i) Scrivere il metodo di Newton per questo particolare sistema non lineare;

ii) Approssimare una soluzione con 2 iterate del metodo a partire da $(x_0, y_0) = (2, 1.5)$;

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	0	1	2	3	-1
y_i	1	2	17	82	2

calcolare

i) La tabella delle differenze divise;

ii) I polinomi $p_k(x)$ che interpolano i punti (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \ldots, k$.

Esercizio 5

Dato il seguente integrale

$$\int_{-2}^{0} f(t)dt, \qquad f(t) = e^{-t^2}(1 + t^2)$$

i) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di 10^{-8};

ii) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo di Simpson sia minore di 10^{-8};

iii) Calcolare l'integrale con il metodo dei Trapezi e 4 intervalli;

Esercizio 6

Si consideri la seguente ODE

$$q'(t) = \frac{q(t)}{1+t^2}, \qquad q(0) = 1.$$

e il metodo di Runge Kutta definito dal tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \cdot \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

i) Calcolare l'ordine del metodo numerico;

ii) Scrivere esplicitamente il metodo numerico associato al tableau;

iii) Fare un passo del metodo numerico con passo $h = 1/2$;

Esercizio 7

Scrivere una procedura MATLAB che dati due vettori X e Y e un punto x calcola il valore del polinomio interpolante i punti assegnati nel punto x.

Calcolo Numerico (Ing. Industriale) - 5 luglio 2011 - B

COGNOME ____________ NOME ____________ N. Matricola ____________

Esercizio 1

Data la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) calcolare la fattorizzazione di LU (con pivoting) di $\boldsymbol{A}$;

iii) usando la fattorizzazione LU di $\boldsymbol{A}$ risolvere il sistema lineare

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ e lo *splitting* $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}$ dove

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ii) Scrivere esplicitamente ($x^{k+1} = ...,\ y^{k+1} = ...$) il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^k)$$

i) Studiare la convergenza del metodo iterativo;

iii) Partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni.

Esercizio 3

Dato il seguente sistema non lineare

$$e^{x+y} - 1 = 0, \qquad x\,y + 1 = 0$$

i) Scrivere il metodo di Newton per questo particolare sistema non lineare;

ii) Approssimare una soluzione con 2 iterate del metodo a partire da $(x_0, y_0) = (2, -1.5)$;

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	0	1	2	3	-1
y_i	-1	0	15	80	0

calcolare

i) La tabella delle differenze divise;

ii) I polinomi $p_k(x)$ che interpolano i punti (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \ldots, k$.

Esercizio 5

Dato il seguente integrale

$$\int_{-2}^{0} f(t)dt, \qquad f(t) = (2 + \sin t)e^{-t^2}$$

i) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di 10^{-8};

ii) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo di Simpson sia minore di 10^{-8};

iii) Calcolare l'integrale con il metodo di Simpson e 4 intervalli (o 2 "intervalloni");

Esercizio 6

Si consideri la seguente ODE

$$q'(t) = \frac{q(t)}{1+t^2}, \qquad q(0) = 1.$$

e il metodo di Runge Kutta definito dal tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \cdot \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

i) Calcolare l'ordine del metodo numerico;

ii) Scrivere esplicitamente il metodo numerico associato al tableau;

iii) Fare un passo del metodo numerico con passo $h = 1/2$;

Esercizio 7

Scrivere una procedura MATLAB che dati due vettori X e Y e un punto x calcola il valore del polinomio interpolante i punti assegnati nel punto x.