Calcolo Numerico (Ing. Industriale) - 22 agosto 2011 - A

COGNOME | | NOME | | N. Matricola | |

Esercizio 1

Data la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

i) verificare che esiste la fattorizzazione di LU di $\boldsymbol{A}$;

ii) calcolare la fattorizzazione di LU di $\boldsymbol{A}$;

iii) usando la fattorizzazione LU di $\boldsymbol{A}$ risolvere il sistema lineare

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e lo *splitting* $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}$ dove

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ii) Scrivere esplicitamente ($x^{k+1} = ...$, $y^{k+1} = ...$) il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^k)$$

i) Studiare la convergenza del metodo iterativo;

iii) Partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni.

Esercizio 3

Dato il seguente sistema non lineare

$$x - \frac{1}{1+y^2} = 0, \qquad x - y = 0$$

i) Scrivere il metodo di Newton per questo particolare sistema non lineare;

ii) Approssimare una soluzione con 2 iterate del metodo a partire da $(x_0, y_0) = (1, 2)$;

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	0	-1	1	-2	2
y_i	1	-8	12	-15	25

calcolare

i) La tabella delle differenze divise;

ii) I polinomi $p_k(x)$ che interpolano i punti (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \ldots, k$.

Esercizio 5

Dato il seguente integrale

$$\int_0^3 f(t)dt, \qquad f(t) = t\ \sin(t) + \log(1+t)$$

i) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di 10^{-8};

ii) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo di Simpson sia minore di 10^{-8};

iii) Calcolare l'integrale con il metodo di Simpson e 4 intervalli (o 2 "intervalloni");

Esercizio 6

Dato il metodo multistep definito dalle tabelle

α_{-1}	α_0	α_1	α_2	α_3
1	0	0	0	-1

β_{-1}	β_0	β_1	β_2	β_3
0	$8/3$	$-4/3$	$8/3$	0

i) Calcolare l'ordine del metodo;

ii) Scrivere explicitamente il metodo multistep applicato alla ODE $q'(t) = 1 + t\,q(t)$, $q(0) = 0$;

Esercizio 7

Scrivere una procedura MATLAB che approssima la soluzione di una ODE

$$q'(t) = f(t, q(t)), \qquad q(0) = q_0$$

con il seguente metodo:

$$q_{k+1/2} = q_k + (h/2) f(t_k, q_k), \qquad q_{k+1} = q_k + h f(t_{k+1/2}, q_{k+1/2})$$

Calcolo Numerico (Ing. Industriale) - 22 agosto 2011 - B

COGNOME | NOME | N. Matricola