

# Calcolo Numerico [140155] - 17 gennaio 2012

COGNOME

NOME

N. Matricola

## Esercizio 1

Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- i) calcolare la fattorizzazione di LU (con pivoting) di  $\mathbf{A}$ ;
- ii) usando la fattorizzazione LU di  $\mathbf{A}$  risolvere il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Esercizio 2

Dato il sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  e lo *splitting*  $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$  dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ii) Scrivere esplicitamente ( $x^{k+1} = \dots$ ,  $y^{k+1} = \dots$ ) il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{Q}\mathbf{x}^k)$$

i) Studiare la convergenza del metodo iterativo;

iii) Partendo dal vettore  $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  fare due iterazioni.

### Esercizio 3

Dato il seguente sistema non lineare

$$e^x - e^y = 0, \quad x + y = 1$$

- i) Scrivere il metodo di Newton per questo particolare sistema non lineare;
- ii) Approssimare una soluzione con 2 iterate del metodo a partire da  $(x_0, y_0) = (2, 1)$ ;

## Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella  $\frac{x_i}{y_i} \left| \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 10 \end{array} \right.$  calcolare

- i) La tabella delle differenze divise;
- ii) I polinomi  $p_k(x)$  che interpolano i punti  $(x_i, y_i)$  con  $i = 0, 1, \dots, k$ .

## Esercizio 5

Dato il seguente integrale

$$\int_{-2}^0 f(t)dt, \quad f(t) = t e^t$$

- i) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di  $10^{-8}$ ;
- ii) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo di Simpson sia minore di  $10^{-8}$ ;
- iii) Calcolare l'integrale con il metodo dei Trapezi e 4 intervalli;

## Esercizio 6

Si consideri la seguente ODE

$$q'(t) = t q(t), \quad q(0) = 1.$$

e il metodo di Runge Kutta definito dal tableau:

0	0	·	·
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	·
1	-1	2	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

- i) Calcolare l'ordine del metodo numerico;
- ii) Scrivere esplicitamente il metodo numerico associato al tableau;
- iii) Fare un passo del metodo numerico con passo  $h = 1/2$ ;

## **Esercizio 7**

Scrivere una procedura MATLAB che implementa il metodo RK dell'esercizio 6.