

# Calcolo Numerico [140155] - 8 luglio 2013

COGNOME

NOME

N. Matricola

## Esercizio 1

Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- i) calcolare la fattorizzazione LU (con pivoting) di  $\mathbf{A}$ ;
- ii) usando la fattorizzazione LU di  $\mathbf{A}$  risolvere il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## Esercizio 2

Dato il sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  e lo *splitting*  $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$  dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ii) Scrivere esplicitamente ( $x^{k+1} = \dots$ ,  $y^{k+1} = \dots$ ) il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{Q}\mathbf{x}^k)$$

i) Studiare la convergenza del metodo iterativo; (suggerimento  $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}||\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$ )

iii) Partendo dal vettore  $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  fare due iterazioni.

### Esercizio 3

Dato la seguente equazione non lineare

$$\cos x^2 - \sin x = 0$$

- i) Scrivere il metodo di Newton per questa particolare equazione;
- ii) Approssimare una soluzione con 2 iterate del metodo a partire da  $x_0 = 1$ ;

### Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella  $\frac{x_i}{y_i} \begin{array}{c|ccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 4 & 14 & 52 \end{array}$  calcolare

- i) La tabella delle differenze divise;
- ii) I polinomi  $p_k(x)$  che interpolano i punti  $(x_i, y_i)$  con  $i = 0, 1, \dots, k$ .

## Esercizio 5

Dato il seguente integrale

$$\int_0^2 f(x)dx, \quad f(x) = e^{-x} \cos x$$

- i) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di  $10^{-8}$ ;
- ii) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo di Simpson sia minore di  $10^{-8}$ ;
- iii) Calcolare l'integrale con il metodo dei Trapezi e 4 intervalli;

## Esercizio 6

Dato il metodo multistep definito dalle tabelle

$\alpha_{-1}$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_{-1}$	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
1	0	0	-1	0	27/80	51/40	9/10	21/40	-3/80

- i) Calcolare l'ordine del metodo;
- ii) Scrivere esplicitamente il metodo multistep applicato alla ODE  $q'(t) = t + q(t)$ ,  $q(0) = 0$ ;

## **Esercizio 7**

Scrivere una procedura MATLAB che implementa il metodo di Eulero per la ODE dell'esercizio 6.