Calcolo Numerico [140155] - 29 agosto 2014

COGNOME ______ NOME ______ N. Matricola ______

Esercizio 1

Data la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

i) calcolare la fattorizzazione LU (con pivoting) di $\boldsymbol{A}$;

ii) usando la fattorizzazione LU di $\boldsymbol{A}$ risolvere il sistema lineare

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e lo *splitting* $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}$ dove

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

i) Scrivere esplicitamente ($x^{k+1} = ...$, $y^{k+1} = ...$) il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}^k)$$

ii) Studiare la convergenza del metodo iterativo; (suggerimento $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}| = |\boldsymbol{P}||\lambda \boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}|$)

iii) Partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni.

Esercizio 3

Data la seguente equazione non lineare

$$x^2 - x \cos x = 0$$

i) Scrivere il metodo di Newton per questa particolare equazione;

ii) Approssimare una soluzione con 2 iterate del metodo a partire da $x_0 = -1$;

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella

x_i	0	-1	1	2	-2
y_i	-1	-2	0	7	-9

calcolare

i) La tabella delle differenze divise;

ii) Il polinomi intermedi $p_k(x)$ che interpolano i punti (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \ldots, k$.

iii) Il polinomio interpolante $p(x)$.

Esercizio 5

Dato il seguente integrale

$$\int_0^2 f(x)dx, \qquad f(x) = x(\sin x)^2$$

i) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di 10^{-5};

ii) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo di Simpson sia minore di 10^{-5};

iii) Calcolare l'integrale con il metodo dei Trapezi e 4 intervalli;

Esercizio 6

Si consideri la seguente ODE

$$y'(x) = x\,y(x), \qquad y(0) = 1.$$

e il metodo di Runge Kutta definito dal tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{12} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

i) Calcolare l'ordine del metodo numerico;

ii) Scrivere esplicitamente il metodo numerico associato al tableau;

iii) Fare un passo del metodo numerico con passo $h = 1/2$;

Esercizio 7

Scrivere una procedura MATLAB che implementa il metodo di Heun (per ODE):

$$y^\star_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^\star_{k+1})\right),$$