

Calcolo Numerico [140300] - 6 luglio 2015

COGNOME

NOME

N. Matricola

Esercizio 1

Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

- i) calcolare la fattorizzazione LU (con pivoting) di \mathbf{A} ;
- ii) usando la fattorizzazione LU di \mathbf{A} risolvere il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e lo *splitting* $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ii) Scrivere esplicitamente ($x^{k+1} = \dots$, $y^{k+1} = \dots$) il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{b} + \mathbf{Q}\mathbf{x}^k)$$

i) Studiare la convergenza del metodo iterativo; (suggerimento $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}||\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$)

iii) Partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni.

Esercizio 3

Dato la seguente equazione non lineare

$$\cos x - e^x = 0$$

- i) Scrivere il metodo di Newton per questa particolare equazione;
- ii) Approssimare una soluzione con 2 iterate del metodo a partire da $x_0 = 1$;

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella $\frac{x_i}{y_i} \begin{array}{c|ccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 11 & 0 & 13 & 62 & 436 \end{array}$ calcolare

- i) La tabella delle differenze divise;
- ii) I polinomi $p_k(x)$ che interpolano i punti (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \dots, k$.

Esercizio 5

Dato il seguente integrale

$$\int_2^5 f(x)dx, \quad f(x) = xe^{-2x} + \cos x$$

- i) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di 10^{-8} ;
- ii) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo di Simpson sia minore di 10^{-8} ;
- iii) Calcolare l'integrale con il metodo dei Trapezi e 3 intervalli;

Esercizio 6

Dato il metodo multistep definito dalle tabelle

α_{-1}	α_0	α_1	α_2	α_3	β_{-1}	β_0	β_1	β_2	β_3
3	0	-1	0	-2	17/18	38/9	4/3	26/9	11/18

- i) Calcolare l'ordine del metodo;
- ii) Scrivere esplicitamente il metodo multistep applicato alla ODE $q'(t) = tq(t)$, $q(0) = 0$;

Esercizio 7

Si consideri la seguente ODE

$$y'(x) = x + x y(x), \quad y(0) = 1.$$

e il metodo di Runge Kutta definito dal tableau:

0	
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

- i) Calcolare l'ordine del metodo numerico;
- ii) Scrivere esplicitamente il metodo numerico associato al tableau;
- iii) Fare un passo del metodo numerico con passo $h = 1/2$;