Fattorizzazione LU con metodo di Gauss

```
> with(LinearAlgebra) :
```

Matrice da fattorizzare

```
> A := <<0,2,0,2,1>|
        <1,2,2,0,2>|
        <2,2,2,-10,1>|
        <3,2,-2,2,-1>|
        <4,2,0,-2,4>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> Asaved := copy(A) ;
```

$$Asaved := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Controllo sia non singolare

```
> Determinant(A) ;
```

$$632 \quad (3)$$

Algoritmo Fattorizzazione, inizializzo il vettore che memorizza la permutazione

```
> P := <1,2,3,4,5> ;
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
> scambio := proc( i, j )
    local tmp ;
    global P, A ;
    tmp := P[i] ; P[i] := P[j] ; P[j] := tmp : P ;
    tmp := A[i,1..-1] ; A[i,1..-1] := A[j,1..-1] ; A[j,1..-1] := tmp
  ;
    [A,P] ;
  end proc :
```

Passo 1

Poiche l'elemento A[1,1] == 0 scambio le prime due righe

```
> scambio(1,2) ;
```

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}\right] \quad (1.1)$$

Azzeramento elementi sotto A[1,1], sommo multiplo della prima riga alle successive, memorizzazione degli scalari usati per azzerate colonna sotto A[1,1] nella stessa colonna

```
> scal := <A[2,1]/A[1,1],A[3,1]/A[1,1],A[4,1]/A[1,1],A[5,1]/A[1,1]>
  ;
```

$$scal := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Applico combinazione lineare

```
> A[2,1..-1] := A[2,1..-1] - scal[1]*A[1,1..-1] ;
  A[3,1..-1] := A[3,1..-1] - scal[2]*A[1,1..-1] ;
  A[4,1..-1] := A[4,1..-1] - scal[3]*A[1,1..-1] ;
  A[5,1..-1] := A[5,1..-1] - scal[4]*A[1,1..-1] ;
```

$$A_{2,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{3,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{4,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & -2 & -12 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A_{5,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Matrice dopo azzeramento elementi sotto A[1,1]

```
> A ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Memorizzazione "scal" sotto A[1,1]

```
> A[2..-1,1] := scal ; A ;
```

$$A_{2..-1,1} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Passo 2

Poiche l'elemento A[2,2] <> 0 NON serve fare nessuno scambio

Azzeramento elementi sotto A[2,2], sommo multiplo della secinda riga alle successive, memorizzazione degli scalari usati per azzerate colonna sotto A[2,2] nella stessa colonna

```
> scal := <A[3,2]/A[2,2],A[4,2]/A[2,2],A[5,2]/A[2,2]> ;
```

$$scal := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Applico combinazione lineare (attenziuone, da fare solo sulle colonne a partire dalla seconda altrimenti si distrugge la matrice L che viene memorizzata nella parte triangolare inferiore)

```
> A[3,2..-1] := A[3,2..-1] - scal[1]*A[2,2..-1] ;
  A[4,2..-1] := A[4,2..-1] - scal[2]*A[2,2..-1] ;
  A[5,2..-1] := A[5,2..-1] - scal[3]*A[2,2..-1] ;
```

$$A_{3,2..-1} := \begin{bmatrix} 0 & -2 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_{4,2..-1} := \begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{5,2..-1} := \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Matrice dopo azzeramento elementi sotto A[2,2]

```
> A ;
```

(2.3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -8 \\ 1 & 0 & -8 & 6 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Memorizzazione "scal" sotto A[2,2]

```
> A[3..-1,2] := scal ; A ;
```

$$A_{3..-1,2} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 & -8 \\ 1 & -2 & -8 & 6 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Passo 3

Poiche l'elemento A[3,3] <> 0 NON serve fare nessuno scambio

Azzeramento elementi sotto A[3,3], sommo multiplo della secinda riga alle successive, memorizzazione degli scalari usati per azzerate colonna sotto A[3,3] nella stessa colonna

```
> scal := <A[4,3]/A[3,3],A[5,3]/A[3,3]> ;
```

$$scal := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Applico combinazione lineare (attenziuone, da fare solo sulle colonne a partire dalla terza altrimenti si distrugge la matrice L che viene memorizzata nella parte triangolare inferiore)

```
> A[4,3..-1] := A[4,3..-1] - scal[1]*A[3,3..-1] ;
  A[5,3..-1] := A[5,3..-1] - scal[2]*A[3,3..-1] ;
```

$$A_{4,3..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 38 & 36 \end{bmatrix}$$

$$A_{5,3..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Matrice dopo azzeramento elementi sotto A[3,3]

```
> A ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 & -8 \\ 1 & -2 & 0 & 38 & 36 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Memorizzazione "scal" sotto A[3,3]

```
> A[4..-1,3] := scal ; A ;
```

$$A_{4\,..-1,\,3} := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 & -8 \\ 1 & -2 & 4 & 38 & 36 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Passo 4

Poiche l'elemento A[4,4] <> 0 NON serve fare nessuno scambio

Azzeramento elementi sotto A[4,4], sommo multiplo della secinda riga alle successive, memorizzazione degli scalari usati per azzerate colonna sotto A[4,4] nella stessa colonna

```
> scal := <A[5,4]/A[4,4]> ;
```

$$scal := \begin{bmatrix} \frac{3}{38} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Applico combinazione lineare (attenziuone, da fare solo sulle colonne a partire dalla terza altrimenti si distrugge la matrice L che viene memorizzata nella parte triangolare inferiore)

```
> A[5,4..-1] := A[5,4..-1] - scal[1]*A[4,4..-1] ;
```

$$A_{5,\,4\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & \frac{79}{19} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Matrice dopo azzeramento elementi sotto A[4,4]

```
> A ;
```

(4.3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 & -8 \\ 1 & -2 & 4 & 38 & 36 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & \frac{79}{19} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Memorizzazione "scal" sotto A[3,3]

```
> A[5..-1,4] := scal ; A ;
```

$$A_{5..-1,4} := \begin{bmatrix} \frac{3}{38} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 & -8 \\ 1 & -2 & 4 & 38 & 36 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{38} & \frac{79}{19} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Dopo aver applicato l'algoritmo di Gauss la matrice A contiene la fattorizzazione LU della matrice originaria

```
> A ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 & -8 \\ 1 & -2 & 4 & 38 & 36 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{38} & \frac{79}{19} \end{bmatrix} \quad (5)$$

La matrice U sta nella parte superiore della matrice

```
> U := ArrayTools[UpperTriangle](A) ;
```

$$U := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 38 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{19} \end{bmatrix} \quad (6)$$

La matrice L-I sta nella parte inferiore

```
> L := ArrayTools[LowerTriangle](A, -1)+Matrix(5, 5, shape =
```

```
identity) ;
```

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{3}{38} & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Verifica che il prodotto LU è PA

```
> L.U ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Applico permutazione a matrice originale

```
> PA := Matrix(5,5) ;
```

$$PA := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

```
> PA[1,1..-1] := Asaved[P[1],1..-1] ;
  PA[2,1..-1] := Asaved[P[2],1..-1] ;
  PA[3,1..-1] := Asaved[P[3],1..-1] ;
  PA[4,1..-1] := Asaved[P[4],1..-1] ;
  PA[5,1..-1] := Asaved[P[5],1..-1] ;
```

$$PA_{1,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$PA_{2,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$PA_{3,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PA_{4,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$PA_{5,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Controllo che la fattorizzazione sia giusta

```
> PA - L.U ;
```

(11)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$