Fattorizzazione LU con metodo di Gauss

```
> with(LinearAlgebra) :
```

Matrice da fattorizzare

```
> A := <<0,2,0,2,2>|
        <0,2,0,0,2>|
        <2,2,2,-10,1>|
        <3,2,-2,2,-1>|
        <4,2,0,-2,4>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> Asaved := copy(A) ;
```

$$Asaved := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Controllo sia non singolare

```
> Determinant(A) ;
```

$$-208 \quad (3)$$

Algoritmo Fattorizzazione, inizializzo il vettore che memorizza la permutazione

```
> P := <1,2,3,4,5> ;
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
> scambio := proc( i, j )
    local tmp ;
    global P, A ;
    tmp := P[i] ; P[i] := P[j] ; P[j] := tmp : P ;
    tmp := A[i,1..-1] ; A[i,1..-1] := A[j,1..-1] ; A[j,1..-1] := tmp
  ;
    [A,P] ;
  end proc :
```

Passo 1

Poiche l'elemento A[1,1] == 0 scambio le prime due righe

```
> scambio(1,2) ;
```

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}\right] \quad \textbf{(1.1)}$$

Azzeramento elementi sotto A[1,1], sommo multiplo della prima riga alle successive, memorizzazione degli scalari usati per azzerate colonna sotto A[1,1] nella stessa colonna

```
> scal := <A[2,1]/A[1,1],A[3,1]/A[1,1],A[4,1]/A[1,1],A[5,1]/A[1,1]>
  ;
```

$$scal := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2)}$$

Applico combinazione lineare

```
> A[2,1..-1] := A[2,1..-1] - scal[1]*A[1,1..-1] ;
  A[3,1..-1] := A[3,1..-1] - scal[2]*A[1,1..-1] ;
  A[4,1..-1] := A[4,1..-1] - scal[3]*A[1,1..-1] ;
  A[5,1..-1] := A[5,1..-1] - scal[4]*A[1,1..-1] ;
```

$$A_{2,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{3,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{4,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & -2 & -12 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A_{5,\,1\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.3)}$$

Matrice dopo azzeramento elementi sotto A[1,1]

```
> A ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.4)}$$

Memorizzazione "scal" sotto A[1,1]

```
> A[2..-1,1] := scal ; A ;
```

$$A_{2\,..-1,\,1} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Passo 2

Poiche l'elemento A[2,2] = 0 scambio riga 2 con riga 4

```
> scambio(2,4) ;
```

$$\left[\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}\right] \tag{2.1}$$

Azzeramento elementi sotto A[2,2], sommo multiplo della secinda riga alle successive, memorizzazione degli scalari usati per azzerate colonna sotto A[2,2] nella stessa colonna

```
> scal := <A[3,2]/A[2,2],A[4,2]/A[2,2],A[5,2]/A[2,2]> ;
```

$$scal := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Applico combinazione lineare (attenziuone, da fare solo sulle colonne a partire dalla seconda altrimenti si distrugge la matrice L che viene memorizzata nella parte triangolare inferiore)

```
> A[3,2..-1] := A[3,2..-1] - scal[1]*A[2,2..-1] ;
  A[4,2..-1] := A[4,2..-1] - scal[2]*A[2,2..-1] ;
  A[5,2..-1] := A[5,2..-1] - scal[3]*A[2,2..-1] ;
```

$$A_{3,\,2\,..\,-1} := \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{4,\,2\,..\,-1} := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{5,\,2\,..\,-1} := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Matrice dopo azzeramento elementi sotto A[2,2]

```
> A ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Memorizzazione "scal" sotto A[2,2]

```
> A[3..-1,2] := scal ; A ;
```

$$A_{3..-1,2} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.5)}$$

Passo 3

Poiche l'elemento A[3,3] <> 0 NON serve fare nessuno scambio

Azzeramento elementi sotto A[3,3], sommo multiplo della secinda riga alle successive, memorizzazione degli scalari usati per azzerate colonna sotto A[3,3] nella stessa colonna

```
> scal := <A[4,3]/A[3,3],A[5,3]/A[3,3]> ;
```

$$scal := \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1)}$$

Applico combinazione lineare (attenziuone, da fare solo sulle colonne a partire dalla terza altrimenti si distrugge la matrice L che viene memorizzata nella parte triangolare inferiore)

```
> A[4,3..-1] := A[4,3..-1] - scal[1]*A[3,3..-1] ;
  A[5,3..-1] := A[5,3..-1] - scal[2]*A[3,3..-1] ;
```

$$A_{4,3..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{5,3..-1} := \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2)}$$

Matrice dopo azzeramento elementi sotto A[3,3]

```
> A ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.3)}$$

Memorizzazione "scal" sotto A[3,3]

```
> A[4..-1,3] := scal ; A ;
```

$$A_{4..-1,3} := \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -4 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Passo 4

Poiche l'elemento A[4,4] <> 0 NON serve fare nessuno scambio

Azzeramento elementi sotto A[4,4], sommo multiplo della secinda riga alle successive, memorizzazione degli scalari usati per azzerate colonna sotto A[4,4] nella stessa colonna

```
> scal := <A[5,4]/A[4,4]> ;
```

$$scal := \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Applico combinazione lineare (attenziuone, da fare solo sulle colonne a partire dalla terza altrimenti si distrugge la matrice L che viene memorizzata nella parte triangolare inferiore)

```
> A[5,4..-1] := A[5,4..-1] - scal[1]*A[4,4..-1] ;
```

$$A_{5,\,4\,..-1} := \begin{bmatrix} 0 & \frac{26}{5} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Matrice dopo azzeramento elementi sotto A[4,4]

```
> A ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{26}{5} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Memorizzazione "scal" sotto A[3,3]

```
> A[5..-1,4] := scal ; A ;
```

$$A_{5\,..-1,\,4} := \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & \frac{26}{5} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Dopo aver applicato l'algoritmo di Gauss la matrice A contiene la fattorizzazione LU della matrice originaria

```
> A ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & \frac{26}{5} \end{bmatrix} \tag{5}$$

La matrice U sta nella parte superiore della matrice

```
> U := ArrayTools[UpperTriangle](A) ;
```

$$U := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -12 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{26}{5} \end{bmatrix} \tag{6}$$

La matrice L-I sta nella parte inferiore

```
> L := ArrayTools[LowerTriangle](A, -1)+Matrix(5, 5, shape =
  identity) ;
```

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Verifica che il prodotto LU è PA

```
> L.U ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Applico permutazione a matrice originale

```
> PA := Matrix(5,5) ;
```

(9)

$$PA := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

```
> PA[1,1..-1] := Asaved[P[1],1..-1] ;
  PA[2,1..-1] := Asaved[P[2],1..-1] ;
  PA[3,1..-1] := Asaved[P[3],1..-1] ;
  PA[4,1..-1] := Asaved[P[4],1..-1] ;
  PA[5,1..-1] := Asaved[P[5],1..-1] ;
```

$$PA_{1,\, 1\, ..-1} := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$PA_{2,\, 1\, ..-1} := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -10 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$PA_{3,\, 1\, ..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PA_{4,\, 1\, ..-1} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$PA_{5,\, 1\, ..-1} := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Controllo che la fattorizzazione sia giusta

```
> PA - L.U ;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Permitazione usata

```
> P ;
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{12}$$