Interpolazione polinomiale

(Lagrange+Newton)

Preparazione del problema

```
> PSOL := x -> x^3/7-4*x+1;
```

$$PSOL := x \rightarrow \frac{1}{7}x^3 - 4x + 1 \quad (1)$$

```
> X := [0, 1, -3, 4, -2, -4] ;
```

$$X := [0, 1, -3, 4, -2, -4] \quad (2)$$

```
> Y := [seq(PSOL(X[i]),i=1..6)] ;
```

$$Y := \left[1, -\frac{20}{7}, \frac{64}{7}, -\frac{41}{7}, \frac{55}{7}, \frac{55}{7}\right] \quad (3)$$

```
> interp(X,Y,z) ;
```

$$\frac{1}{7}z^3 - 4z + 1 \quad (4)$$

Soluzione con metodo di Lagrange

```
> lag0 := (x-X[2])*(x-X[3])*(x-X[4])*(x-X[5])*(x-X[6]) ;
  lag1 := (x-X[1])*(x-X[3])*(x-X[4])*(x-X[5])*(x-X[6]) ;
  lag2 := (x-X[1])*(x-X[2])*(x-X[4])*(x-X[5])*(x-X[6]) ;
  lag3 := (x-X[1])*(x-X[2])*(x-X[3])*(x-X[5])*(x-X[6]) ;
  lag4 := (x-X[1])*(x-X[2])*(x-X[3])*(x-X[4])*(x-X[6]) ;
  lag5 := (x-X[1])*(x-X[2])*(x-X[3])*(x-X[4])*(x-X[5]) ;
```

$$lag0 := (x-1)(x+3)(x-4)(x+2)(x+4)$$

$$lag1 := x(x+3)(x-4)(x+2)(x+4)$$

$$lag2 := x(x-1)(x-4)(x+2)(x+4)$$

$$lag3 := x(x-1)(x+3)(x+2)(x+4)$$

$$lag4 := x(x-1)(x+3)(x-4)(x+4)$$

$$lag5 := x(x-1)(x+3)(x-4)(x+2) \quad (1.1)$$

Polinomi della base di Lagrange

```
> L0 := expand(lag0/subs(x=X[1],lag0)) ;
  L1 := expand(lag1/subs(x=X[2],lag1)) ;
  L2 := expand(lag2/subs(x=X[3],lag2)) ;
  L3 := expand(lag3/subs(x=X[4],lag3)) ;
  L4 := expand(lag4/subs(x=X[5],lag4)) ;
  L5 := expand(lag5/subs(x=X[6],lag5)) ;
```

$$L0 := \frac{1}{96}x^5 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{32}x^3 - \frac{35}{48}x^2 - \frac{1}{6}x + 1$$

$$L1 := -\frac{1}{180}x^5 - \frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{18}x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{15}x$$

$$L2 := \frac{1}{84}x^5 + \frac{1}{84}x^4 - \frac{3}{14}x^3 - \frac{4}{21}x^2 + \frac{8}{21}x$$

$$L3 := \frac{1}{4032} x^5 + \frac{1}{504} x^4 + \frac{17}{4032} x^3 - \frac{1}{2016} x^2 - \frac{1}{168} x$$

$$L4 := -\frac{1}{72} x^5 - \frac{1}{36} x^4 + \frac{19}{72} x^3 + \frac{4}{9} x^2 - \frac{2}{3} x$$

$$L5 := -\frac{1}{320} x^5 + \frac{3}{64} x^3 + \frac{1}{32} x^2 - \frac{3}{40} x \quad \textbf{(1.2)}$$

Costruzione del polinomio interpolante

```
> P := Y[1]*L0 +
       Y[2]*L1 +
       Y[3]*L2 +
       Y[4]*L3 +
       Y[5]*L4 +
       Y[6]*L5 ;
```

$$P := 1 - 4 x + \frac{1}{7} x^3 \quad \textbf{(1.3)}$$

Soluzione metodo di Newton (senza differenze divise)

Polinomio che interpola il primo punto

```
> p0 := Y[1] ;
```

$$p0 := 1 \quad \textbf{(2.1)}$$

Polinomio che interpola i primi 2 punti

```
> p1 := p0 + A*(x-X[1]) ;
```

$$p1 := A x + 1 \quad \textbf{(2.2)}$$

Determino A in base alla condizione di interpolazione

```
> SOLA := solve( subs(x=X[2],p1)=Y[2], {A}) ;
```

$$SOLA := \left\{A = -\frac{27}{7}\right\} \quad \textbf{(2.3)}$$

```
> p1 := subs( SOLA, p1 ) ;
```

$$p1 := -\frac{27}{7} x + 1 \quad \textbf{(2.4)}$$

Polinomio che interpola i primi 3 punti

```
> p2 := p1 + A*(x-X[1])*(x-X[2]) ;
```

$$p2 := -\frac{27}{7} x + 1 + A x (x - 1) \quad \textbf{(2.5)}$$

Determino A in base alla condizione di interpolazione

```
> SOLA := solve( subs(x=X[3],p2)=Y[3], {A}) ;
```

$$SOLA := \left\{A = -\frac{2}{7}\right\} \quad \textbf{(2.6)}$$

```
> p2 :=expand(subs( SOLA, p2 )) ;
```

$$p2 := -\frac{25}{7} x + 1 - \frac{2}{7} x^2 \quad \textbf{(2.7)}$$

Controllo interpolazione

```
> [subs(x=X[1],p2)-Y[1],subs(x=X[2],p2)-Y[2],subs(x=X[3],p2)-Y[3]];
```

$$[0, 0, 0] \tag{2.8}$$

Polinomio che interpola i primi 4 punti

```
> p3 := p2 + A*(x-X[1])*(x-X[2])*(x-X[3]) ;
```

$$p3 := -\frac{25}{7}x + 1 - \frac{2}{7}x^2 + A\,x\,(x-1)\,(x+3) \tag{2.9}$$

Determino A in base alla condizione di interpolazione

```
> SOLA := solve( subs(x=X[4],p3)=Y[4], {A}) ;
```

$$SOLA := \left\{A = \frac{1}{7}\right\} \tag{2.10}$$

```
> p3 :=expand(subs( SOLA, p3 )) ;
```

$$p3 := 1 - 4\,x + \frac{1}{7}x^3 \tag{2.11}$$

Controllo interpolazione

```
> [subs(x=X[1],p3)-Y[1],subs(x=X[2],p3)-Y[2],subs(x=X[3],p3)-Y[3],
  subs(x=X[4],p3)-Y[4]];
```

$$[0, 0, 0, 0] \tag{2.12}$$

Polinomio che interpola i primi 5 punti

```
> p4 := p3 + A*(x-X[1])*(x-X[2])*(x-X[3])*(x-X[4]) ;
```

$$p4 := 1 - 4\,x + \frac{1}{7}x^3 + A\,x\,(x-1)\,(x+3)\,(x-4) \tag{2.13}$$

Determino A in base alla condizione di interpolazione

```
> SOLA := solve( subs(x=X[5],p4)=Y[5], {A}) ;
```

$$SOLA := \{A = 0\} \tag{2.14}$$

```
> p4 :=expand(subs( SOLA, p4 )) ;
```

$$p4 := 1 - 4\,x + \frac{1}{7}x^3 \tag{2.15}$$

Polinomio che interpola tutti e 6 i punti

```
> p5 := p4 + A*(x-X[1])*(x-X[2])*(x-X[3])*(x-X[4])*(x-X[5]) ;
```

$$p5 := 1 - 4\,x + \frac{1}{7}x^3 + A\,x\,(x-1)\,(x+3)\,(x-4)\,(x+2) \tag{2.16}$$

Determino A in base alla condizione di interpolazione

```
> SOLA := solve( subs(x=X[6],p5)=Y[6], {A}) ;
```

$$SOLA := \{A = 0\} \tag{2.17}$$

```
> p5 :=expand(subs( SOLA, p5 )) ;
```

$$p5 := 1 - 4\,x + \frac{1}{7}x^3 \tag{2.18}$$

Soluzione metodo di Newton (CON differenze divise)

Calcolo delle differenze divise

```
> x0 := X[1] :
  x1 := X[2] :
  x2 := X[3] :
  x3 := X[4] :
  x4 := X[5] :
  x5 := X[6] :
  f[x0] := Y[1] :
  f[x1] := Y[2] :
  f[x2] := Y[3] :
  f[x3] := Y[4] :
  f[x4] := Y[5] :
  f[x5] := Y[6] :
```

Differenze divise (con 2 punti)

```
> f[x0,x1] := (f[x0]-f[x1])/(x0-x1) ;
  f[x1,x2] := (f[x1]-f[x2])/(x1-x2) ;
  f[x2,x3] := (f[x2]-f[x3])/(x2-x3) ;
  f[x3,x4] := (f[x3]-f[x4])/(x3-x4) ;
  f[x4,x5] := (f[x4]-f[x5])/(x4-x5) ;
```

$$f_{0,\,1} := -\frac{27}{7}$$

$$f_{1,\,-3} := -3$$

$$f_{-3,\,4} := -\frac{15}{7}$$

$$f_{4,\,-2} := -\frac{16}{7}$$

$$f_{-2,\,-4} := 0 \tag{3.1}$$

Differenze divise (con 3 punti)

```
> f[x0,x1,x2] := (f[x0,x1]-f[x1,x2])/(x0-x2) ;
  f[x1,x2,x3] := (f[x1,x2]-f[x2,x3])/(x1-x3) ;
  f[x2,x3,x4] := (f[x2,x3]-f[x3,x4])/(x2-x4) ;
  f[x3,x4,x5] := (f[x3,x4]-f[x4,x5])/(x3-x5) ;
```

$$f_{0,\,1,\,-3} := -\frac{2}{7}$$

$$f_{1,\,-3,\,4} := \frac{2}{7}$$

$$f_{-3,\,4,\,-2} := -\frac{1}{7}$$

$$f_{4,\,-2,\,-4} := -\frac{2}{7} \tag{3.2}$$

Differenze divise (con 4 punti)

```
> f[x0,x1,x2,x3] := (f[x0, x1,x2]-f[x1,x2, x3])/(x0-x3) ;
  f[x1,x2,x3,x4] := (f[x1, x2,x3]-f[x2,x3, x4])/(x1-x4) ;
  f[x2,x3,x4,x5] := (f[x2, x3,x4]-f[x3,x4, x5])/(x2-x5) ;
```

$$f_{0,\,1,\,-3,\,4} := \frac{1}{7}$$

$$f_{1,\,-3,\,4,\,-2} := \frac{1}{7}$$

(3.3)

$$f_{-3,\,4,\,-2,\,-4} := \frac{1}{7} \tag{3.3}$$

Differenze divise (con 5 punti)

```
> f[x0,x1,x2,x3,x4] := (f[x0, x1,x2,x3]-f[x1,x2,x3, x4])/(x0-x4) ;
  f[x1,x2,x3,x4,x5] := (f[x1, x2,x3,x4]-f[x2,x3,x4, x5])/(x1-x5) ;
```

$$f_{0,\,1,\,-3,\,4,\,-2} := 0$$

$$f_{1,\,-3,\,4,\,-2,\,-4} := 0 \tag{3.4}$$

Differenze divise (con 6 punti)

```
> f[x0,x1,x2,x3,x4,x5] := (f[x0, x1,x2,x3,x4]-f[x1,x2,x3,x4,x5])/
  (x0-x5) ;
```

$$f_{0,\,1,\,-3,\,4,\,-2,\,-4} := 0 \tag{3.5}$$

Costruzione polinomi della base

```
> omega[0] := 1 ;
  omega[1] := omega[0]*(x-x0) ;
  omega[2] := expand(omega[1]*(x-x1)) ;
  omega[3] := expand(omega[2]*(x-x2)) ;
  omega[4] := expand(omega[3]*(x-x2)) ;
  omega[5] := expand(omega[4]*(x-x3)) ;
```

$$\omega_0 := 1$$

$$\omega_1 := x$$

$$\omega_2 := x^2 - x$$

$$\omega_3 := x^3 + 2\,x^2 - 3\,x$$

$$\omega_4 := x^4 + 5\,x^3 + 3\,x^2 - 9\,x$$

$$\omega_5 := x^5 + x^4 - 17\,x^3 - 21\,x^2 + 36\,x \tag{3.6}$$

Costruzione polinomio intepolante

```
> p := f[x0]                 * omega[0] +
       f[x0,x1]              * omega[1] +
       f[x0,x1,x2]           * omega[2] +
       f[x0,x1,x2,x3]        * omega[3] +
       f[x0,x1,x2,x3,x4]     * omega[4] +
       f[x0,x1,x2,x3,x4,x5]  * omega[5] ;
```

$$p := 1 - 4\,x + \frac{1}{7}\,x^3 \tag{3.7}$$