Numerical Methods for Dynamic System and Control del 8/1/2010

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ____________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= 1 + y_k + z_k, \\
y_{k+1} &= 1 + x_k + z_k, \\
z_{k+1} &= 1 + x_k + y_k,
\end{aligned}
$$

con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 2$.

Trasformata Zeta:	$\zeta x(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta - 1} + y(\zeta) + z(\zeta)$ $\zeta y(\zeta) - \zeta = \frac{\zeta}{\zeta - 1} + x(\zeta) + z(\zeta)$ $\zeta z(\zeta) - 2\zeta = \frac{\zeta}{\zeta - 1} + x(\zeta) + y(\zeta)$
Soluzione in Zeta:	$x(\zeta) = \frac{2\zeta(2\zeta - 1)}{(\zeta + 1)(\zeta - 1)(\zeta - 2)} = \frac{2\zeta}{\zeta - 2} - \frac{\zeta}{\zeta + 1} - \frac{\zeta}{\zeta - 1},$ $y(\zeta) = \frac{\zeta^2}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)} = \frac{2\zeta}{\zeta - 2} - \frac{\zeta}{\zeta - 1},$ $z(\zeta) = \frac{2(\zeta^2 - \zeta + 1))\zeta}{(\zeta + 1)(\zeta - 1)(\zeta - 2)} = \frac{2\zeta}{\zeta - 2} + \frac{\zeta}{\zeta + 1} - \frac{\zeta}{\zeta - 1}.$
Soluzione	$x_k = 2^{k+1} - 1 - (-1)^k,$ $y_k = 2^{k+1} - 1,$ $z_k = 2^{k+1} - 1 + (-1)^k.$

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x'(t) + x''(t) = \sin t$$
$$y'(t) - x''(t) = \cos t$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:
$$\begin{cases} s\,x(s) - 1 + s^2\,x(s) - s &= \dfrac{1}{s^2+1} \\ \\ s\,y(s) - s^2\,x(s) + s &= \dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

Soluzione in s:
$$x(s) = \frac{s^2+2+s^3+s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{2}{s} - \frac{1+s}{2(s^2+1)} - \frac{1}{2(s+1)},$$
$$y(s) = -\frac{s^3-s+1}{(s+1)(s^2+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{3-s}{2(s^2+1)} + \frac{1}{2(s+1)}$$

Soluzione in t:
$$x(t) = 2 - \frac{\exp(-t)+\cos(t)+\sin(t)}{2}$$
$$y(t) = -1 + \frac{\exp(-t)-\cos(t)+3\sin(t)}{2}$$

3 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y'''(x) = -1 \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0, \qquad y''(0) = A. \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che $y(1) = 1$.

Trasformata di Laplace: $s^3\, y(s) - A - s^2 = -\dfrac{1}{s}$

Soluzione in s: $y(s) = \dfrac{As + s^3 - 1}{s^4} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^4} + \dfrac{A}{s^3}$

Soluzione in x: $y(x) = \dfrac{1}{2}Ax^2 + 1 - \dfrac{1}{6}x^3 = 1 + x^2\dfrac{1-x}{6}$

Costante A: $A = \dfrac{1}{3}$

4 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y) = x^2 + xy,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x^2 + y \le 1, \qquad x \le y,$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:

$$\begin{bmatrix} 2x + y + 2\mu_1 x + \mu_2 = 0, \\ x + \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ \mu_1(1 - x^2 - y) = 0, \\ \mu_2(y - x) = 0 \end{bmatrix}$$

Punti candidati ad essere minimi:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= -\frac{1}{3} \\ y &= \frac{8}{9} \\ \mu_1 &= \frac{1}{3} \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

Discussione dei punti stazionari:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_1^T H_1 K_1 = (\,2\,), \quad \text{Ok, Minimo}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_2^T H_2 K_2 = (\,9\,), \quad \text{OK, Minimo}$$

5 Livello difficoltà 1

(Solo per l'esame di Metodi matematici e calcolo per ingegneria). Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x & \text{per} \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{per} \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	0		
a_k	$=$	0		
b_k	$=$	$-\dfrac{2k\cos(\pi k/2)}{(k^2-1)\pi}$	$=$	$\dfrac{2k}{(k^2-1)\pi} \times \begin{cases} (-1)^{1+k/2} & \text{se } k \text{ pari} \\ 0 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$

6 Livello difficoltà 2

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control). Data la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare l'esponenziale di matrice.

autovalori $\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1+\sqrt{2}, \qquad \lambda_3 = 1-\sqrt{2}$

$$e^{\boldsymbol{A}} \qquad = \qquad \begin{pmatrix} 4.718 & 3.718 & 4.919 \\ 1.201 & 2.201 & 2.517 \\ 3.718 & 3.718 & 5.919 \end{pmatrix}$$