Numerical Methods for Dynamic System and Control del 16 Febbraio 2010

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ____________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= k + x_k + z_{k+1}, \\
y_{k+1} &= -k + y_k + z_{k+1}, \\
z_{k+1} &= 1 + x_{k+1} + y_k,
\end{aligned}
$$

con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 2$.

Trasformata Zeta:	$\zeta\, x(\zeta) = \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^2} + x(\zeta) + \zeta\, z(\zeta) - 2\zeta$ $\zeta\, y(\zeta) - \zeta = -\dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^2} + y(\zeta) + \zeta\, z(\zeta) - 2\zeta$ $\zeta\, z(\zeta) - 2\zeta = \dfrac{\zeta}{\zeta-1} + \zeta\, x(\zeta) + y(\zeta)$
Soluzione in Zeta:	$x(\zeta) = -\dfrac{\zeta}{2}\dfrac{2\zeta^2-3\zeta-1}{(\zeta-1)^3} = \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^3} - \dfrac{\zeta}{2(\zeta-1)^2} - \dfrac{\zeta}{\zeta-1},$ $y(\zeta) = -\dfrac{\zeta}{2}\dfrac{\zeta+1}{(\zeta-1)^3} = -\dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^3} - \dfrac{\zeta}{2(\zeta-1)^2},$ $z(\zeta) = \dfrac{\zeta-3/2}{\zeta-1} = \dfrac{\zeta}{\zeta-1} + \dfrac{3}{2}$
Soluzione	$x_k = \dfrac{k^2}{2} - k - 1,$ $y_k = -\dfrac{k^2}{2}$ $z_k = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\delta_k. \qquad \delta_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases}$

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$
\begin{aligned}
x''(t) &= \sin t \\
y(t) - y''(t) &= \cos t
\end{aligned}
$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$\begin{cases} s^2 x(s) - s = \dfrac{1}{s^2+1} \\ y(s) - s^2 y(s) - s = \dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{s^3+s+1}{s^2(s^2+1)} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{1}{s},$ $y(s) = -s\dfrac{s^2+2}{s^4-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{3}{4(s-1)} - \dfrac{3}{4(s+1)},$
Soluzione in t:	$x(t) = 1 + t - \sin(t),$ $y(t) = \dfrac{1}{2}\cos(t) - \dfrac{3}{4}(e^t + e^{-t}).$

3 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y'''(x) + y''(x) = 0 \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = A. \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che $y(\infty)$ sia finito.

Trasformata di Laplace: $s^3 y(s) - A - 2s - s^2 + s^2 y(s) - 1 = 0$
Soluzione in s: $y(s) = \dfrac{A + 2s + s^2 + 1}{s^2(s+1)} = \dfrac{A+1}{s^2} + \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{1-A}{s}$
Soluzione in x: $y(x) = A\exp(-x) + 1 - A + (A+1)x = 2 - \exp(-x)$
Costante A: $A = -1$

4 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y) = x + 2y,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad y \leq 2, \qquad 1 \leq xy,$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:

$$\begin{bmatrix} 1-\mu_2 y = 0, \\ 2+\mu_1-\mu_2 x = 0, \\ \mu_1(2-y) = 0, \\ \mu_2(xy-1) = 0. \end{bmatrix}$$

Punti candidati ad essere minimi:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}, \\ y &= \sqrt{2}/2, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Discussione
dei punti stazionari:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_1^T H_1 K_1 = (\, 4\sqrt{2}\,), \quad \text{Ok, Minimo}$$

5 Livello difficoltà 1

(Solo per l'esame di Metodi matematici e calcolo per ingegneria). Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{per } \; x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{per } \; x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \text{per } \; x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	$-\dfrac{2}{\pi}$
a_k	$=$	$2\dfrac{\cos(k\pi/2)}{(k^2-1)\pi} = \dfrac{2}{(k^2-1)\pi} \times \begin{cases} (-1)^{k/2} & \text{se } k \text{ pari} \\ 0 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$
b_k	$=$	0

6 Livello difficoltà 2

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control). Data la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare l'esponenziale di matrice.

autovalori $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$

$$e^{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 7.388 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4.670 & 1.718 & 2.718 \end{pmatrix}$$