Numerical Methods for Dynamic System and Control del 16 giugno 2010

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ______________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$x_{k+2} = k + y_k,$$
$$y_{k+1} = 2y_k,$$

con dato iniziale $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $y_0 = 1$. Suggerimento $\mathcal{Z}^{-1}(1) = \delta_0$ e $\mathcal{Z}^{-1}(1/z) = \delta_1$

Trasformata Zeta:	$z^2\,x(z) - z = y(z) + \dfrac{z}{(z-1)^2}$ $z\,y(z) - z = 2y(z)$
Soluzione in Zeta:	$x(z) = \dfrac{z^3 - 3z^2 + 4z - 3}{z(z-2)(z-1)^2} = \dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{2z} + \dfrac{z}{4(z-2)} - \dfrac{2z}{z-1} + \dfrac{z}{(z-1)^2},$ $y(z) = \dfrac{z}{z-2}$
Soluzione	$x_k = 2^{k-2} + k - 2, \qquad k \geq 2$ $y_k = 2^k.$

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x''(t) + y(t) = e^t$$
$$y''(t) = 1$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$\begin{cases} s^2\, x(s) - s + y(s) = \dfrac{1}{s-1} \\ s^2\, y(s) + s = \dfrac{1}{s} \end{cases}$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{1}{s^5} + \dfrac{1}{s^2(s-1)} = -\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^5} + \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{1}{s-1}$, $y(s) = \dfrac{1-s^2}{s^3} = -\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^3}$,
Soluzione in t:	$x(t) = e^t - t + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^4}{24}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{2} - 1$.

3 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y'''(x) = x^2 \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = A. \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che $y(1) = 0$.

Trasformata di Laplace:	$s^3 y(s) - A - s - s^2 = \frac{2}{s^3}$
Soluzione in s:	$y(s) = \frac{As^3 + s^4 + s^5 + 2}{s^6} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^6} + \frac{A}{s^3}$
Soluzione in x:	$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{x^5}{60} = \frac{x^3 - 121}{60}x^2 + x + 1$
Costante A:	$A = -\frac{121}{30}$

4 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y) = xy - y,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x + y \leq 2, \qquad 2y \leq x,$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:	$$\left[\begin{array}{c} y+\mu_1-\mu_2=0, \\ x-1+\mu_1+2\mu_2=0, \\ \mu_1(2-x-y)=0, \\ \mu_2(x-2y)=0. \end{array}\right]$$
Punti candidati ad essere minimi:	$$\begin{aligned} x &= 1, \\ y &= 0, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}, \\ y &= \frac{1}{4}, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$
Discussione dei punti stazionari:	$$H_1=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1=\emptyset, \qquad \text{Hessiano indefinito}$$ $$H_2=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad K_2^T H_2 K_2 = (\,4\,), \qquad \text{Ok, Minimo}$$

5 Livello difficoltà 1

(Solo per l'esame di Metodi matematici e calcolo per ingegneria). Data la seguente funzione

$$f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

definita per $x\in(-\pi,\pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{8k\cos(k\pi)}{(1-4k^2)\pi} = \frac{8k(-1)^k}{(1-4k^2)\pi}$$

6 Livello difficoltà 2

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control). Data la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare l'esponenziale di matrice (esatto senza approssimazione floating point)

autovalori $\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 1$

$$e^{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^3-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$