Numerical Methods for Dynamic System and Control del 13 luglio 2010

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ______________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$x_{k+2} = x_k,$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + y_k,$$

con dato iniziale $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $y_0 = 1$.

Trasformata Zeta:

$$z^2\, x(z) - z = x(z)$$

$$z\, y(z) - z = z\, x(z) + y(z)$$

Soluzione in Zeta:

$$x(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{z}{2(z-1)} - \frac{z}{2(z+1)},$$

$$y(z) = \frac{z(z^2+z-1)}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{5z}{4(z-1)} + \frac{z}{2(z-1)^2} - \frac{z}{4(z+1)}$$

Soluzione

$$x_k = \frac{1-(-1)^k}{2},$$

$$y_k = \frac{5-(-1)^k+2k}{4}.$$

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x''(t) + y''(t) = e^t$$
$$y'(t) + x(t) = 1$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$\begin{cases} s^2\,x(s) + s^2\,y(s) = \dfrac{1}{s-1} \\ s\,y(s) + 1 + x(s) = \dfrac{1}{s} \end{cases}$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{s^2-2s+2}{s(s-1)^2} = \dfrac{2}{s} - \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{(s-1)^2},$ $y(s) = \dfrac{-1-s+2s^2-s^3}{s^2(s-1)^2} = -\dfrac{3}{s} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{2}{s-1} - \dfrac{1}{(s-1)^2},$
Soluzione in t:	$x(t) = 2 + (t-1)e^t,$ $y(t) = (2-t)e^t - (t+3).$

3 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y'''(x) = \cos x + Ae^x \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = A. \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{e^x} = 1.$$

Trasformata di Laplace: $s^3\, y(s) - A - s - s^2 = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{A}{s-1}$

Soluzione in s: $y(s) = \dfrac{As^2 + A + s - 2 + s^4}{s^2(s^2+1)(s-1)} = \dfrac{1-A}{s} - \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{2-A}{s^2}$

Soluzione in x: $y(x) = Ae^x + 1 - A - \sin(x) + x(2-A) = e^x - \sin(x) + x$

Costante A: $A = 1$

4 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y) = xy - x - x^2,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad x^2 + y^2 \leq 1,$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:	$\begin{bmatrix} y - 1 - 2x - \mu_1 + 2\mu_3 x = 0, \\ x - \mu_2 + 2\mu_3 y = 0, \\ \mu_1 x = 0, \\ \mu_2 y = 0, \\ \mu_3(1 - x^2 - y^2) = 0. \end{bmatrix}$
Punti candidati ad essere minimi:	$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 1, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= 0, \\ \mu_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 1, \\ y &= 0, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= 1, \\ \mu_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$
Discussione dei punti stazionari:	$H_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_1 = \emptyset$, Hessiano indefinito $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $K_2 = \emptyset$, Hessiano definito positivo, è minimo

5 Livello difficoltà 1

(Solo per l'esame di Metodi matematici e calcolo per ingegneria). Data la seguente funzione

$$f(x) = x\cos(x),$$

definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	0
a_k	$=$	0
b_k	$=$	$\dfrac{2k(-1)^k}{k^2-1}$

6 Livello difficoltà 2

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control). Data la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare l'esponenziale di matrice.

autovalori $\quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 3$
$e^{\boldsymbol{A}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 13.73 & -6.358 & -6.358 \\ -6.358 & 13.73 & -6.358 \\ -6.358 & -6.358 & 13.73 \end{pmatrix}$