Numerical Methods for Dynamic System and Control del 8 settembre 2010

COGNOME		NOME		MATRICOLA	

Firma ____________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$x_{k+2} = 2x_{k+1} - x_k,$$
$$y_{k+1} = 1 + x_k,$$

con dato iniziale $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $y_0 = 1$. Suggerimento $\mathcal{Z}^{-1}(1) = \delta_0$.

Trasformata Zeta:

$$z^2\, x(z) - z = 2z\, x(z) - x(z)$$

$$z\, y(z) - z = \frac{z}{z-1} + x(z)$$

Soluzione in Zeta:

$$x(z) = \frac{z}{(z-1)^2},$$

$$y(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z-1)^2} = 1 + \frac{z}{(z-1)^2}$$

Soluzione

$$x_k = k,$$

$$y_k = k, \qquad k \geq 1$$

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x''(t) - y''(t) = e^t$$
$$x(t) + y(t) = 0$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} s^2\, x(s) - 2s - s^2\, y(s) &= \dfrac{1}{s-1} \\ \\ y(s) + x(s) &= 0 \end{cases}$$

Soluzione in s:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{2}\frac{2s^2-2s+1}{s^2(s-1)} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2s}, \\ y(s) &= -\frac{1}{2}\frac{2s^2-2s+1}{s^2(s-1)} = -\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2s}, \end{aligned}$$

Soluzione in t:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1-t+e^t}{2}, \\ y(t) &= \frac{t-1-e^t}{2}. \end{aligned}$$

3 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} y'''(x) = \cos x + A \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = A. \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^3} = 1.$$

Trasformata di Laplace: $s^3\, y(s) - A - s - s^2 = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{A}{s}$
Soluzione in s: $y(s) = \dfrac{A(s^3+s^2+s+1) + s^4 + 2s^2 + s^5 + s^3}{s^4(s^2+1)} = \dfrac{A}{s^3} + \dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{A}{s^4}$
Soluzione in x: $y(x) = 1 + 2x - \sin(x) + \dfrac{A}{6}x^2(x+3) = 1 + 2x - \sin(x) + x^2(x+3)$
Costante A: $A = 6$

4 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y) = x^2 - x + y + xy,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad x^2 + y^2 \leq 1,$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:

$$\begin{bmatrix} 2x - 1 + y - \mu_1 + 2 * \mu_3 x = 0, \\ 1 + x - \mu_2 + 2\mu_3 y = 0, \\ \mu_1 x = 0, \\ \mu_2 y = 0, \\ \mu_3(1 - x^2 - y^2) = 0. \end{bmatrix}$$

Punti candidati ad essere minimi:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}, \\ y &= 0, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \frac{3}{2}, \\ \mu_3 &= 0 \end{aligned}$$

Discussione dei punti stazionari:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1^T H_1 K_1 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Ok, Minimo}$$

5 Livello difficoltà 1

(Solo per l'esame di Metodi matematici e calcolo per ingegneria). Data la seguente funzione

$$f(x) = x\cos(x),$$

definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	0
a_k	$=$	0
b_k	$=$	$\dfrac{2k(-1)^k}{k^2-1}$

6 Livello difficoltà 2

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control). Data la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare l'esponenziale di matrice.

autovalori $\quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 3$
$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} - \dfrac{2+e^3}{3}\boldsymbol{A} + \dfrac{1+2e^3}{9}\boldsymbol{A}^2 = e^3\boldsymbol{I} + \dfrac{1-e^3}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.724 & -6.362 & -6.362 \\ -6.362 & 13.724 & -6.362 \\ -6.362 & -6.362 & 13.724 \end{pmatrix}$