Numerical Methods for Dynamic System and Control del 17/1/2011

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ______________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= k + z_k, \\
x_{k+1} + y_{k+1} &= z_k, \\
y_{k+1} + z_{k+1} &= x_k
\end{aligned}
$$

con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$.

Trasformata Zeta:	$\zeta x(\zeta) = \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^2} + z(\zeta)$ $\zeta x(\zeta) + \zeta y(\zeta) - \zeta = z(\zeta)$ $\zeta y(\zeta) - \zeta + \zeta z(\zeta) = x(\zeta)$
Soluzione in Zeta:	$x(\zeta) = \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^3},$ $y(\zeta) = \dfrac{\zeta(\zeta-2)}{(\zeta-1)^2} = \dfrac{\zeta}{\zeta-1} - \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^2},$ $z(\zeta) = \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^3}.$
Soluzione	$x_k = \dfrac{k}{2}(k-1),$ $y_k = 1-k,$ $z_k = \dfrac{k}{2}(k-1).$

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x''(t) + y''(t) = e^t$$
$$x'(t) - y''(t) = t$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} s^2\, y(s) - 1 + s^2\, x(s) &= \dfrac{1}{s-1} \\[2ex] s\, x(s) - s^2\, y(s) - s &= \dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

Soluzione in s:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s + s^4 - 1}{s^3(s^2-1)} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}, \\ y(s) &= \frac{1 - s + s^2 + s^3 - s^4}{s^3(s^2-1)} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} \end{aligned}$$

Soluzione in t:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - t + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ y(t) &= t - 2 - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{aligned}$$

3 Livello difficoltà 2

Data il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} x''(t) = t \\ y''(t) = 1 \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad x'(0) = A, \qquad y'(0) = B. \end{cases}$$

Calcolare le costanti A e B in modo che $x(1) = y(1) = 0$.

Trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} s^2 x(s) - A - s &= \frac{1}{s^2}, \\ s^2 y(s) - B - s &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Soluzione in s:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{As^2 + s^3 + 1}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^4} + \frac{A}{s^2}, \\ y(s) &= \frac{Bs + s^2 + 1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{B}{s^2}. \end{aligned}$$

Soluzione in x:

$$\begin{aligned} x(t) &= At + 1 + \frac{t^3}{6}, \\ y(t) &= Bt + 1 + \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Costanti A e B: $\quad A = -\frac{7}{6}, \qquad B = -\frac{3}{2}.$

4 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + x,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x \geq 1, \qquad xy \geq 1,$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:	$\begin{cases} -\dfrac{y}{x^2} + 1 - \mu_1 - \mu_2 y = 0 \\ \dfrac{1}{x} - \mu_2 x = 0 \\ \mu_1(x-1) = 0, \\ \mu_2(xy-1) = 0 \end{cases}$
Punti candidati ad essere minimi:	$\begin{aligned} x &= 2^{1/3} \\ y &= 2^{-1/3} \\ \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 2^{-1/3} \end{aligned}$
Discussione dei punti stazionari:	$H_1 = \begin{pmatrix} 2^{-1/3} & -2^{1/3} \\ -2^{1/3} & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} -2^{1/3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_1^T H_1 K_1 = (\,6\,),$ Ok, Minimo

5 Livello difficoltà 1

(Solo per l'esame di Metodi matematici e calcolo per ingegneria). Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } \; x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{per } \; x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -x & \text{per } \; x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	$-\dfrac{3}{4}\pi$
a_k	$=$	0
b_k	$=$	$\dfrac{2(\cos(k\pi/2) - \cos(k\pi)) + k\pi\sin(k\pi/2)}{k^2\pi}$

6 Livello difficoltà 2

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control 2009/2010). Data la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare l'esponenziale di matrice.

autovalori $\quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1$
$e^{\boldsymbol{A}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 7.361 & 6.361 & 6.361 \\ 2.864 & 3.864 & 3.497 \\ 9.858 & 9.858 & 10.22 \end{pmatrix}$

7 Livello difficoltà 3

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control 2010/2011). Dato il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \text{Minimizzare:} \quad \displaystyle\int_1^2 x(t)e^t dt \\ x'(t) = \dfrac{e^t}{u(t)} + x(t) \\ x(1) = -\dfrac{e}{4} \\ 1 \leq u(t) \leq 2 \end{cases}$$

calcolare:

Il problema ai valori al contorno ottenuto con l'applicazione della variazione prima e Pontryagin:
Il controllo $u(t)$:
Variazione seconda e verifica che $u(t)$ è un minimo: