Numerical Methods for Dynamic System and Control del 21/2/2011

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ____________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$x_{k+1} = x_k + k,$$
$$y_{k+1} = y_k + z_k,$$
$$z_{k+1} = x_k + y_k + z_k,$$

con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$.

Trasformata Zeta:	$\zeta x(\zeta) = x(\zeta) + \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^2}$ $\zeta y(\zeta) = y(\zeta) + z(\zeta)$ $\zeta z(\zeta) - \zeta = x(\zeta) + y(\zeta) + z(\zeta)$
Soluzione in Zeta:	$x(\zeta) = \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^3},$ $y(\zeta) = \zeta\dfrac{3-3\zeta+\zeta^2}{(\zeta-2)(\zeta-1)^3} = \dfrac{\zeta}{\zeta-2} - \dfrac{\zeta}{\zeta-1} - \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^3},$ $z(\zeta) = \zeta\dfrac{3-3\zeta+\zeta^2}{(\zeta-2)(\zeta-1)^2} = \dfrac{\zeta}{\zeta-2} - \dfrac{\zeta}{(\zeta-1)^2}.$
Soluzione	$x_k = \dfrac{1}{2}k(k-1),$ $y_k = \dfrac{1}{2}k(1-k) - 1 + 2^k,$ $z_k = 2^k - k.$

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$y''(t) + y'(t) = e^t$$
$$x''(t) - y'(t) = t$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} s^2\, y(s) + s + s\, y(s) &= \dfrac{1}{s-1} \\ \\ s^2\, x(s) - 1 - s - s\, y(s) &= \dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

Soluzione in s:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s^2 + s^5 - 1}{s^4(s^2-1)} = \frac{1}{s^4} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)}, \\ y(s) &= \frac{1 + s - s^2}{s(s^2-1)} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Soluzione in t:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) + \frac{t^3}{6} \\ y(t) &= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - 1 \end{aligned}$$

3 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} x''(t) = t \\ y'(t) + x(t) = 1 \\ x(0) = 1, \qquad y(0) = 1, \qquad x'(0) = A. \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che $y(1) = 0$.

Trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} s^2\, x(s) - A - s &= \frac{1}{s^2}, \\ s\, y(s) - 1 + x(s) &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Soluzione in s:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{As^2 + s^3 + 1}{s^4} = \frac{1}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{1}{s^4}, \\ y(s) &= \frac{s^4 - As^2 + 1}{s^5} = \frac{1}{s} - \frac{A}{s^3} - \frac{1}{s^5}. \end{aligned}$$

Soluzione in x:

$$\begin{aligned} x(t) &= At + 1 + \frac{t^3}{6}, \\ y(t) &= 1 - \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{24}t^4. \end{aligned}$$

Costante A: $\qquad A = \dfrac{23}{12}.$

4 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + x + y^2,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad xy \geq 1, \qquad y \geq 0,$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{y}{x^2} - \mu_1 y = 0, \\ \dfrac{1}{x} + 2y - \mu_1 x - \mu_2 = 0, \\ \mu_1(xy-1) = 0, \\ \mu_2 y = 0 \end{cases}$$

Punti candidati ad essere minimi:

$$\begin{aligned} x &= 2^{2/3} \\ y &= 2^{-2/3} \\ \mu_1 &= \frac{3}{4}2^{2/3} \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

Discussione dei punti stazionari:

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}2^{1/3} & -2^{2/3} \\ -2^{2/3} & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 2^{-\frac{2}{3}} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad K_1^T H_1 K_1 = (\,12\,), \quad \text{Ok, Minimo}$$

5 Livello difficoltà 1

(Solo per l'esame di Metodi matematici e calcolo per ingegneria). Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 2x & \text{per } x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{per } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	0
a_k	$=$	$\dfrac{2k}{(k^2-4)\pi} \times \begin{cases} -(-1)^{(k-1)/2} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$
b_k	$=$	0

6 Livello difficoltà 2

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control). Data la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare l'esponenziale di matrice.

autovalori $\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}, \qquad \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$

$$e^{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 6.609 & 4.296 & 5.609 \\ 4.296 & 3.626 & 4.296 \\ 5.609 & 4.296 & 6.609 \end{pmatrix}$$

7 Livello difficoltà 3

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control 2010/2011). Dato il seguente problema di controllo ottimo

$$
\begin{cases}
\text{Minimizzare:} \quad \displaystyle\int_0^4 u(t)^2 + 2u(t) - x(t)dt \\
x'(t) = x(t) + u(t) \\
x(0) = 1 \\
u(t) \geq -3
\end{cases}
$$

calcolare:

Il problema ai valori al contorno ottenuto con l'applicazione della variazione prima e Pontryagin:

Il controllo $u(t)$:

Variazione seconda e verifica che $u(t)$ è un minimo: