Numerical Methods for Dynamic System and Control del 5 luglio 2011

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ______________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$x_{k+1} = x_k + k,$$
$$y_{k+1} = y_k - z_k,$$
$$z_{k+1} = x_k - z_k,$$

con dato iniziale $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$.

Trasformata Zeta:

$$\zeta x(\zeta) - \zeta = x(\zeta) + \frac{\zeta}{(\zeta-1)^2}$$

$$\zeta y(\zeta) - \zeta = y(\zeta) - z(\zeta)$$

$$\zeta z(\zeta) - \zeta = x(\zeta) - z(\zeta)$$

Soluzione in Zeta:

$$x(\zeta) = \zeta\frac{\zeta^2 - 2\zeta + 2}{(\zeta-1)^3} = \frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{(\zeta-1)^3},$$

$$\begin{aligned} y(\zeta) &= \zeta\frac{\zeta^4 - 3\zeta^3 + 2\zeta^2 + \zeta - 2}{(\zeta-1)(\zeta-1)^4} \\ &= \frac{3/16}{\zeta+1} + \frac{13/16}{\zeta-1} - \frac{5/8}{(\zeta-1)^2} + \frac{1/4}{(\zeta-1)^3} - \frac{1/2}{(\zeta-1)^4}, \end{aligned}$$

$$z(\zeta) = \zeta\frac{\zeta^3 - 2\zeta^2 + \zeta + 1}{(\zeta-1)(\zeta-1)^3} = \frac{3/8}{\zeta+1} + \frac{5/8}{\zeta-1} - \frac{1/4}{(\zeta-1)^2} + \frac{1/2}{(\zeta-1)^3}.$$

Soluzione

$$x_k = \frac{1}{2}k(k-1) + 1,$$

$$y_k = \frac{13}{16} - \frac{11}{12}k + \frac{3}{8}k^2 - \frac{1}{12}k^3 + \frac{3}{16}(-1)^k,$$

$$z_k = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{8}(-1)^k.$$

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$y''(t) + x'(t) = 1$$
$$x''(t) + y''(t) = t$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} s^2\,y(s) - 1 + s\,x(s) &= \dfrac{1}{s} \\ \\ s^2\,x(s) - s + s^2\,y(s) &= \dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

Soluzione in s:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s^2-1}{s^3} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3}, \\ y(s) &= \frac{s+1}{s^4} = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4}. \end{aligned}$$

Soluzione in t:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - \frac{1}{2}t^2, \\ y(t) &= \frac{1}{6}t^2(t+3). \end{aligned}$$

3 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 0 \\ y'(t) + x(t) = 1 \\ x(0) = 1, \qquad y(0) = A, \qquad x'(0) = 0. \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che $x(\pi)^2 + y(\pi)^2 = 1$.

Trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} s^2\, x(s) - s + x(s) &= 0, \\ s\, y(s) - A + x(s) &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Soluzione in s:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s}{s^2+1}, \\ y(s) &= \frac{1 + As(1+s^2)}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2}. \end{aligned}$$

Soluzione in x:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t, \\ y(t) &= A + t - \sin t. \end{aligned}$$

Costante A: $\quad A = -\pi$.

4 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y) = x\,y\,z - x - y - z,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x^2 + y^2 \le 1, \qquad z \ge 0, \qquad z \le 1.$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:	$\begin{cases} y\,z - 1 + 2\mu_1\,x = 0, \\ z\,x - 1 + 2\,\mu_1\,y = 0, \\ x\,y - 1 - \mu_2 + \mu_3 = 0, \\ \mu_1(1 - x^2 - y^2) = 0, \\ \mu_2\,z = 0, \\ \mu_3(1 - z) = 0 \end{cases}$
Punti candidati ad essere minimi:	$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \\ \mu_2 &= 0 \\ \mu_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \\ \mu_2 &= 0 \\ \mu_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z &= 1 \\ \mu_1 &= \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ \mu_2 &= 0 \\ \mu_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$
Discussione dei punti stazionari:	$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_1^T H_1 K_1 = (\,1\,),$ Ok $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2^T H_2 K_2 = (\,1\,),$ Ok $H_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_3^T H_3 K_3 = (\,2\sqrt{2} - 4\,),$ NO

5 Livello difficoltà 1

(Solo per l'esame di Metodi matematici e calcolo per ingegneria). Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } \ x < -\pi/2 \\ x^2 & \text{per } \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{per } \ x > \pi/2 \end{cases}$$

definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	$\frac{\pi^2}{12}$
a_k	$=$	$\frac{(k^2\pi^2 - 8)\sin(k\pi/2)}{2\pi k^3} + \frac{2\cos(k\pi/2)}{k^2} = \frac{(-1)^{[k/2]}}{k^2} \times \begin{cases} \frac{k^2\pi^2 - 8}{2\pi k} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 2 & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$
b_k	$=$	0

6 Livello difficoltà 2

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control). Data la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare l'esponenziale di matrice.

autovalori $\quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2 + \sqrt{6}, \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{6}$

$$e^{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 39.39 & 17.34 & 38.39 \\ 17.34 & 8.432 & 17.34 \\ 38.39 & 17.34 & 39.39 \end{pmatrix}$$