Numerical Methods for Dynamic System and Control del 22 agosto 2011

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ______________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + k^2,\\
y_{k+1} &= x_{k+1} + y_k - k,
\end{aligned}
$$

con dato iniziale $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Trasformata Zeta:

$$
\zeta x(\zeta) = x(\zeta) + \frac{\zeta(\zeta+1)}{(\zeta-1)^3}
$$

$$
\zeta y(\zeta) = \zeta x(\zeta) + y(\zeta) - \frac{\zeta}{(\zeta-1)^2}
$$

Soluzione in Zeta:

$$
x(\zeta) = \zeta\frac{\zeta+1}{(\zeta-1)^4} = \frac{\zeta}{(\zeta-1)^3} + \frac{2\zeta}{(\zeta-1)^4},
$$

$$
y(\zeta) = \zeta\frac{3\zeta-1}{(\zeta-1)^5} = \frac{3\zeta}{(\zeta-1)^4} + \frac{2\zeta}{(\zeta-1)^5},
$$

Soluzione

$$
x_k = \frac{1}{6}k - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3,
$$

$$
y_k = \frac{1}{2}k - \frac{7}{12}k^2 + \frac{1}{12}k^4.
$$

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$y''(t) + y'(t) = \cos t$$
$$x''(t) + x'(t) = t$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:
$$\begin{cases} s^2\, y(s) + s + s\, y(s) &= \dfrac{s}{s^2+1} \\ s^2\, x(s) - 1 - s + s\, x(s) &= \dfrac{1}{s^2} \end{cases}$$

Soluzione in s:
$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1+s^2+s^3}{s^3(s+1)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1}, \\ y(s) &= -\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{1-s}{2(1+s^2)} - \frac{1}{2(s+1)}. \end{aligned}$$

Soluzione in t:
$$\begin{aligned} x(t) &= 2 - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-1} \\ y(t) &= \frac{\sin t - \cos t - e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

3 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x''(t) + y'(t) = 0 \\ y''(t) - x'(t) = 1 \\ x(0) = 1, \qquad y(0) = 1, \qquad x'(0) = -1, \qquad y'(0) = A \end{cases}$$

Calcolare la costante A in modo che $y(1) = 0$.

Trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} s^2\, x(s) - s + s\, y(s) &= 0, \\ s^2\, y(s) - A - s - s\, x(s) + 1 &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Soluzione in s:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s^3 - s^2 + (1-A)s - 1}{s^2(s^2+1)} = \frac{As}{1+s^2} + \frac{1-A}{s} - \frac{1}{s^2}, \\ y(s) &= \frac{1 + As + s^2}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{A}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Soluzione in x:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - t + A(\cos t - 1), \\ y(t) &= 1 + A \sin t. \end{aligned}$$

Costante A: $\qquad A = \dfrac{1-\pi}{2}.$

4 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad x^2 + y \leq 1, \qquad y \leq 0,$$

Suggerimento: usare le condizioni KKT al primo ordine per trovate i candidati a essere punti di minimo e per risolvere il sistema non lineare risultante mettere a zero alternativamente i moltiplicatori.

Sistema non lineare KKT al primo ordine:

$$\begin{cases} 2x + 2\mu_1 x = 0, \\ -2y + \mu_1 + \mu_2 = 0, \\ \mu_1(1 - x^2 - y) = 0, \\ -\mu_2 y = 0 \end{cases}$$

Punti candidati ad essere minimi:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ \mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 0 \end{aligned}$$

Discussione dei punti stazionari:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_1^T H_1 K_1 = (\,2\,), \quad \text{Ok, Minimo}$$

5 Livello difficoltà 1

(Solo per l'esame di Metodi matematici e calcolo per ingegneria). Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{per } x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \text{per } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	0
a_k	$=$	0
b_k	$=$	$\dfrac{2}{k\pi}(\cos(\pi k) - \cos(\pi k/2))$

6 Livello difficoltà 2

(Solo per l'esame di Numerical Methods for Dynamic System and Control). Data la seguente matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare l'esponenziale di matrice.

autovalori $\quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 3$
$e^{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 9.148 & 1.787 & 4.574 \\ 9.148 & 3.787 & 3.574 \\ 17.30 & 4.574 & 9.148 \end{pmatrix}$