

Approssimazione Numerica delle DAE

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2008/2009

Outline

- 1 Origine delle DAE
- 2 Stabilizzazione alla Baumgarte
- 3 L'indice di Kroneker
- 4 L'indice Differenziale di una DAE
- 5 DAE in forma semi-esplicita
- 6 Un esempio semplice
- 7 L'equazione del pendolo in coordinate sovrabbondanti
- 8 Il metodo Coordinate Partitioning

Origine delle DAE

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ vettore delle coordinate (dipendenti).
- $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: energia cinetica.
- $V(\mathbf{q})$: energia potenziale.
- $\mathbf{Q}_{ex}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$: forze esterne generalizzate.
- $\Phi(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^m$: equazioni dei vincoli.
- $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$: Lagrangiana.
- Equazioni del moto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \Phi(\mathbf{q}, t)^T}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{ex}(\mathbf{q}) \quad (*)$$

- $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ sono i moltiplicatori di Lagrange associati ai vincoli.

Normalmente l'energia cinetica prende la forma:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

cosicché la (*) diventa

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_{ex} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Il sistema di equazioni differenziali da risolvere diventa quindi

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q(\mathbf{q}, t)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$$

che è composto parte da equazione differenziale e parte da vincolo algebrico (cioè é un DAE=**Differential Algebraic Equation**)



Come fare per risolvere numericamente questo sistema ?

$$M(q)\ddot{q} + \Phi_q(q, t)^T \lambda = Q(q, \dot{q}) \quad (\text{DAE.1})$$

$$\Phi(q, t) = \mathbf{0} \quad (\text{DAE.2})$$

ad esempio se sviluppo la soluzione con Taylor

$$\dot{q}(t + \Delta t) = \dot{q}(t) + \ddot{q}(t)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \dot{q}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{q}(t)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

trascurando i termini $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ e $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ posso costruire il seguente schema numerico

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + \ddot{q}_k \Delta t$$

$$q_{k+1} = q_k + \dot{q}_k \Delta t + \frac{1}{2}\ddot{q}_k \Delta t^2$$

per poterlo definire devo in qualche modo calcolare \ddot{q}_k



Se la matrice di massa $M(q)$ è non singolare usando la equazione (DAE.1) posso ricavare \ddot{q} :

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} [Q(q, \dot{q}) - \Phi_q(q, t)^T \lambda]$$

ma per poter chiudere il giro devo in qualche modo determinare λ . Di fatto devo determinare n valori per \ddot{q} e m valori per λ . In (DAE.1) ci sono n equazioni differenziali mentre (DAE.2) sono m equazioni algebriche. Quindi nella conta delle equazioni abbiamo abbastanza relazioni per determinare \ddot{q} e λ . Purtroppo l'equazione (DAE.2) ma contiene solo q . Come fare ?

Soluzione: se derivo l'equazione (DAE.2) due volte posso ottenere una equazione contenente \ddot{q}



Derivando una prima volta la k esima componente di (DAE.2) otteniamo

$$\frac{d}{dt}\Phi_k(\mathbf{q}(t), t) = \frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}(t)$$

e derivando una seconda volta otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\Phi_k(\mathbf{q}(t), t) &= \frac{\partial^2\Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial t\partial\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}(t) \\ &+ \dot{\mathbf{q}}(t)^T \frac{\partial^2\Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial\mathbf{q}^2}\dot{\mathbf{q}}(t) + \frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}(t), t)}{\partial\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}}(t) \end{aligned}$$

usando una notazione più compatta omettendo gli argomenti delle funzioni otteniamo:

$$\mathbf{0} = \Phi_{tt} + 2\Phi_{tq}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_{qq}\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_q\ddot{\mathbf{q}} \quad (\text{DAE.2}'')$$

dove $(\Phi_{qq}\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})_k = \dot{\mathbf{q}}^T(\Phi_k)_{qq}\dot{\mathbf{q}}$.

Unendo la (DAE.1) con la (DAE.2") otteniamo

$$M(q)\ddot{q} + \Phi_q(q, t)^T \lambda = Q(q, \dot{q}) \quad (\text{DAE.1})$$

$$\Phi_q(q, t)\ddot{q} = c(q, \dot{q}, t) \quad (\text{DAE.2"})$$

dove

$$c_k(q, \dot{q}, t) = -(\Phi_k)_{tt} - 2(\Phi_k)_{tq}\dot{q} - \dot{q}^T(\Phi_k)_{qq}\dot{q}$$

Questo può essere riscritto in forma matriciale come segue

$$\begin{pmatrix} M(q) & \Phi_q(q, t)^T \\ \Phi_q(q, t) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(q, \dot{q}) \\ c(q, \dot{q}, t) \end{pmatrix}$$

Se la matrice $(n + m) \times (n + m)$ è invertibile allora possiamo determinare \ddot{q} e λ e chiudere l'algoritmo.



Algoritmo di integrazione

Mettendo tutto assieme otteniamo:

- Dato iniziale $t_0 = 0$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$, $\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(0)$.

Per $k = 0, 1, \dots$

- Risolvo il sistema lineare per ricavare $\ddot{\mathbf{q}}_k$ e λ_k

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}_k) & \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_k, t_k)^T \\ \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_k, t_k) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k) \\ \mathbf{c}(\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k, t_k) \end{pmatrix}$$

- Aggiorno le approssimazioni \mathbf{q}_{k+1} e $\dot{\mathbf{q}}_{k+1}$

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \dot{\mathbf{q}}_k + \ddot{\mathbf{q}}_k \Delta t$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \dot{\mathbf{q}}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{q}}_k \Delta t^2$$

Problemi dell' algoritmo proposto

(1/2)

- L'algoritmo precedentemente proposto è un algoritmo del primo ordine (errore di troncamento locale $\mathcal{O}(\Delta t^2)$) per il sistema (DAE.1)–(DAE.2'')
- Il problema è che se considero la seguente equazione dei vincoli

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \Phi(\mathbf{q}, t) + \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t$$

e la sostituisco al posto di $\Phi(\mathbf{q}, t)$ ottengo lo stesso sistema (DAE.1)–(DAE.2'').

- I vettori costanti \mathbf{a}_0 e \mathbf{a}_1 sono determinati dalle condizioni iniziali infatti se $\mathbf{q}(0)$ e $\dot{\mathbf{q}}(0)$ sono i dati iniziali allora $\tilde{\Phi}(\mathbf{q}, t)$ deve soddisfare

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{q}(0), 0) = \Phi(\mathbf{q}(0), 0) + \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot 0 = \mathbf{0}$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(\mathbf{q}(0), 0) = \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{q}(0), 0) + \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$$

Problemi dell' algoritmo proposto

(2/2)

- Nel caso ideale le condizioni al contorno sono fissate in modo che $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$.
- Ogni passo dello schema numerico produce \mathbf{q}_{k+1} che leggermente viola il vincolo $\Phi(\mathbf{q}, t)$ quindi ogni passo dello schema numerico è come se cambiasse leggermente le costanti \mathbf{a}_0 e \mathbf{a}_1 .
- Anche ammettendo di fare un piccolissimo errore nel primo passo di fatto avremo una **deriva** della soluzione nei passi successivi di almeno $\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t$.
- Questo di fatto rende inutilizzabile questo schema se non per piccolissimi tempi.

Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

(1/6)

Energia cinetica:

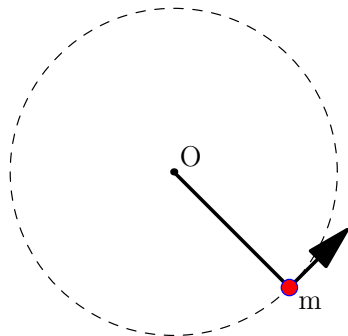
$$T(t) = \frac{1}{2}m(x'(t)^2 + y'(t)^2)$$

Energia potenziale

$$V(t) = mgy(t)$$

Vincolo

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$



Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

(2/6)

Sistema di equazioni

$$mx''(t) + 2x(t)\lambda(t) = 0$$

$$my''(t) + 2y(t)\lambda(t) = -mg$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$

Derivando due volte il vincolo:

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

$$2x(t)x''(t) + 2y(t)y''(t) + 2x'(t)^2 + 2y'(t)^2 = 0$$

Per cui abbiamo

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 2x(t) \\ 0 & m & 2y(t) \\ 2x(t) & 2y(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ -2x'(t)^2 - 2y'(t)^2 \end{pmatrix}$$

Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

(3/6)

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 2x_k \\ 0 & m & 2y_k \\ 2x_k & 2y_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k'' \\ y_k'' \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ -2(x_k')^2 - 2(y_k')^2 \end{pmatrix}$$

e risolvendo il sistema lineare

$$x_k'' = \frac{x_k (gy_k - s_k)}{r_k}$$

$$y_k'' = -\frac{gx_k^2 + y_k s_k}{r_k}$$

$$\lambda_k = -\frac{m(gy_k - s_k)}{2r_k}$$

dove $r_k = x_k^2 + y_k^2$, $s_k = (x_k')^2 + (y_k')^2$.

Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

(4/6)

E da qui abbiamo lo schema numerico

- 1 x_0, y_0, x'_0, y'_0 sono assegnati compatibilmente al vincolo.
- 2 per $k = 0, 1, 2, \dots$
 - calcolo x''_k, y''_k con le formule:

$$x''_k = \frac{x_k (gy_k - s_k)}{r_k}, \quad r_k = x_k^2 + y_k^2$$

$$y''_k = -\frac{gx_k^2 + y_k s_k}{r_k}, \quad s_k = (x'_k)^2 + (y'_k)^2$$

- Avanzo di Δt con le formule:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t x'_k + (\Delta t^2/2)x''_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t y'_k + (\Delta t^2/2)y''_k$$

$$x'_{k+1} = x'_k + \Delta t x''_k$$

$$y'_{k+1} = y'_k + \Delta t y''_k$$

Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

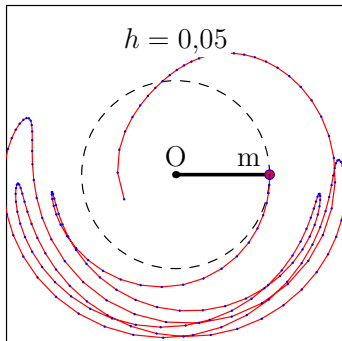
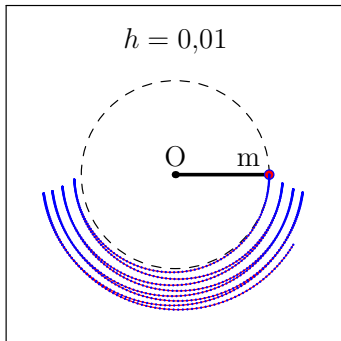
(5/6)

DAE integrata senza stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**.

Pendolo in coordinate naturali:

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 0 \quad u_0 = 0 \quad v_0 = 0 \quad T = 10$$



Esempio: Pendolo in coordinate sovrabbondanti

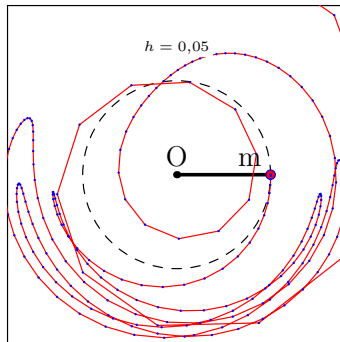
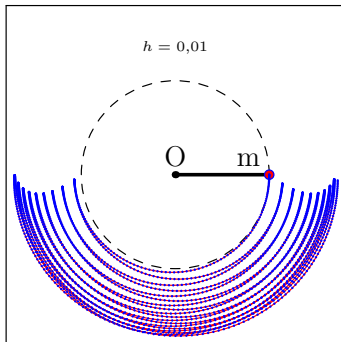
(6/6)

DAE integrata senza stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**. Effetto a lungo termine

Pendolo in coordinate naturali:

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 0 \quad u_0 = 0 \quad v_0 = 0 \quad T = 25$$



Stabilizzazione alla Baumgarte

(1/5)

Nella derivazione precedente il problema è che se considero la seguente equazione dei vincoli

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \Phi(\mathbf{q}, t) + \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t$$

non cambia nulla nella parte numerica. Consideriamo quindi la seguente equazione differenziale

$$z''(t) + 2\zeta\omega z'(t) + \omega^2 z(t) = 0$$

che ha come soluzione

$$z(t) = \left[z(0) \cosh\left(t\omega \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) + \frac{z'(0) + \zeta z(0)}{\omega \sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh\left(t\omega \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \right] e^{-t\zeta\omega}$$

Cioè se $0 \leq \zeta \leq 1$ ma se abbiamo una soluzione oscillante con esponenziale decrescente.

Stabilizzazione alla Baumgarte

(2/5)

cioè se $0 \leq \zeta \leq 1$ ma se abbiamo una soluzione oscillante con esponenziale decrescente. In particolare se $\zeta = 1$ abbiamo lo smorzamento critico e

$$z(t) = (z(0) + t z'(0)(1 + \omega))e^{-\omega t}$$

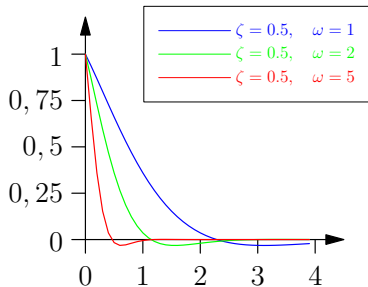
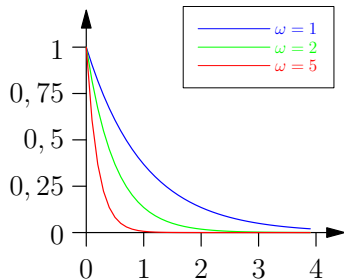
e se $\zeta^2 = 1 - \varepsilon^2$ abbiamo

$$z(t) = \left[(z'(0) + z(0)\zeta\omega) \frac{\sin(\omega\varepsilon t)}{\omega\varepsilon} + z(0) \cos(\omega\varepsilon t) \right] e^{-\omega\zeta t}$$

In ogni caso scegliendo $\zeta \in (0, 1]$ abbiamo una soluzione che va a 0 esponenzialmente per $t \rightarrow \infty$.

Stabilizzazione alla Baumgarte

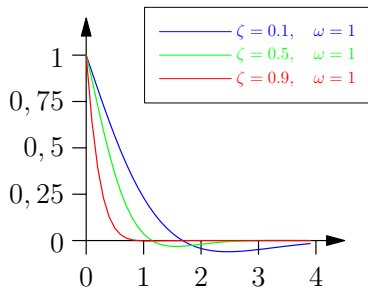
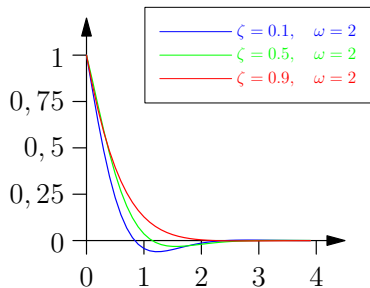
(3/5)

Esempio di soluzione con vari valori di ω e ζ .

Stabilizzazione alla Baumgarte

(4/5)

Esempio di soluzione con vari valori di ω e ζ .



Stabilizzazione alla Baumgarte

(5/5)

- Queste considerazioni suggeriscono di sostituire l'equazione

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{0}$$

con la seguente

$$\frac{d^2}{dt^2} \Phi(\mathbf{q}(t), t) + 2\zeta\omega \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{q}(t), t) + \omega^2 \Phi(\mathbf{q}(t), t) = \mathbf{0}$$

- i parametri ζ e ω dovranno essere scelti in modo da rendere il decadimento della soluzione il più rapido possibile compatibilmente la stabilità numerica del metodo.
- In generale ζ va scelto in $[0, 1]$ piccolo ma non troppo (ad esempio 0.1) in modo da rendere l'abbattimento dell'errore il più rapido possibile.



Esempio: Pendolo con stabilizzazione

(1/5)

Trasformiamo il sistema al primo ordine

$$x'(t) = u(t)$$

$$y'(t) = v(t)$$

$$mu'(t) + 2x(t)\lambda(t) = 0$$

$$mv'(t) + 2y(t)\lambda(t) = -mg$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$

Derivando due volte il vincolo:

$$2x(t)u(t) + 2y(t)v(t) = 0$$

$$2x(t)u'(t) + 2y(t)v'(t) + 2u(t)^2 + 2v(t)^2 = 0$$

Equazione del vincolo stabilizzata (omettiamo dipendenza da t)

$$2xu' + 2yv' + 2u^2 + 2v^2 + 2\zeta\omega(2xu + 2yv) + \omega^2(x^2 + y^2 - 1) = 0$$



Esempio: Pendolo con stabilizzazione

(2/5)

Sostituendo le equazioni di $u'(t)$ e $v'(t)$ nella equazione del vincolo stabilizzata possiamo ricavare λ

$$\lambda = \frac{2u^2 + 2v^2 + 2\zeta\omega(2xu + 2yv) + \omega^2(x^2 + y^2 - 1) - 2gy}{4(x^2 + y^2)}$$

possiamo allora integrare l'equazione usando il metodo di Eulero esplicito

$$\lambda_k = \frac{2(u_k^2 + v_k^2) + 4\zeta\omega(x_k u_k + y_k v_k) + \omega^2(x_k^2 + y_k^2 - 1) - 2gy_k}{4(x_k^2 + y_k^2)}$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t u_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t v_k$$

$$u_{k+1} = u_k - 2\Delta t m^{-1} x_k \lambda_k$$

$$v_{k+1} = v_k - 2\Delta t m^{-1} y_k \lambda_k - \Delta t g$$



Esempio: Pendolo con stabilizzazione

(3/5)

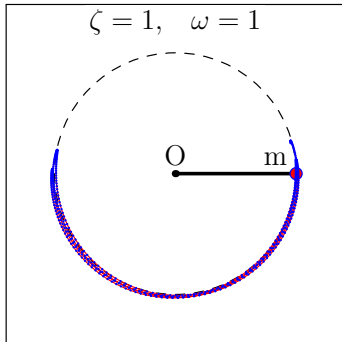
DAE integrata CON stabilizzazione

Dato iniziale consistente

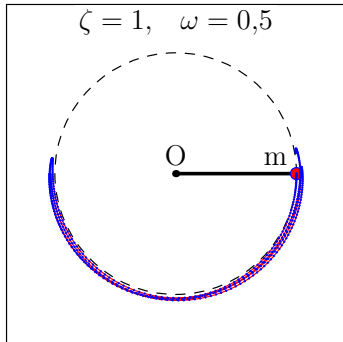
Pendolo in coordinate naturali:

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 0 \quad u_0 = 0 \quad v_0 = 0 \quad h = 0,01 \quad T = 5$$

$$\zeta = 1, \quad \omega = 1$$



$$\zeta = 1, \quad \omega = 0,5$$

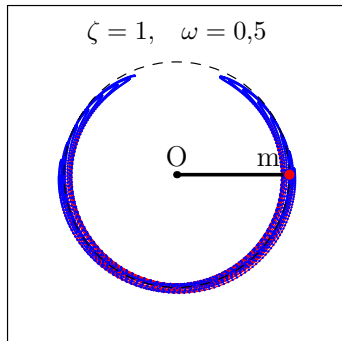
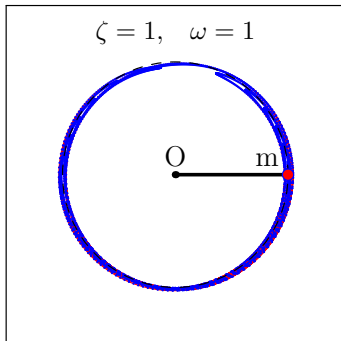


Esempio: Pendolo con stabilizzazione

(4/5)

DAE integrata **CON** stabilizzazioneDato iniziale **consistente** effetto a lungo termine

Pendolo in coordinate naturali:
 $x_0 = 1$ $y_0 = 0$ $u_0 = 0$ $v_0 = 0$ $h = 0,01$ $T = 25$



Esempio: Pendolo con stabilizzazione

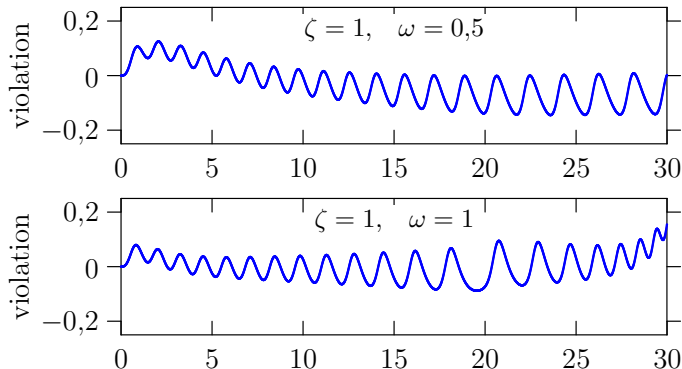
(5/5)

DAE integrata CON stabilizzazione

Dato iniziale **consistente** violazione del vincolo.

Pendolo in coordinate naturali

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 0 \quad u_0 = 0 \quad v_0 = 0 \quad h = 0,01 \quad T = 30$$



Riduzione del sistema al primo ordine

Conviene trasformare il sistema (DAE.1)–(DAE.2) dal secondo ordine al primo ponendo $p(t) = \dot{q}(t)$:

$$\dot{q} = p$$

$$M(q)\dot{p} + \Phi_q(q, t)^T \lambda = Q(q, p)$$

$$\Phi(q, t) = \mathbf{0}$$

che possiamo riscrivere come (DAE semi esplicita di indice 3)

$$\dot{x} = g(x, y, t)$$

$$\dot{y} = f(x, y, \lambda, t)$$

$$\mathbf{0} = h(x, t)$$

dove $g(x, y, t) = y$, $h(x, t) = \Phi(x, t)$ e

$$f(x, y, \lambda, t) = M(x)^{-1} [Q(x, y) - \Phi_q(x, t)^T \lambda]$$

DAE Lineari

Prima di imbarcarci nello studio delle DAE generali conviene vedere cosa succede nei casi semplici ad esempio quando le equazioni sono lineari.

Consideriamo ad esempio la seguente DAE lineare

$$F\mathbf{x}'(t) + G\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)$$

dove se F è non singolare otteniamo di nuovo un ODE (Ordinary Differential Equation). Dovremo mettere delle condizioni su F e G altrimenti ci troveremo in casi patologici (ad esempio $F = G = \mathbf{0}$).

Se ad esempio

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

questo ponendo $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$ corrisponde alla singola equazione differenziale

$$x'(t) = y(t)$$

che come soluzione

$$x(t) = \int_0^t g(z) dz, \quad y(t) = g(t)$$

dove $g(t)$ è una funzione arbitraria che soddisfa le condizioni iniziali. Serve quindi una condizione per avere esistenza e unicità almeno nel caso lineare.

Definizione

La coppia di matrici (A, B) sono un **Pencil Regolare** se esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\det(\lambda A + B) \neq 0$$

Teorema (Kroneker)

Se (A, B) sono un **Pencil Regolare** allora esistono due matrici U e V non singolari tali che

$$UAV = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix} \quad UB^V = \begin{pmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix}$$

Le matrici N e C sono nella forma normale di Jordan e N ha autovalori tutti nulli.

Ovviamente i blocchi corrispondenti nelle matrici partizionate hanno le stesse dimensioni.

Di fatto le matrici N e C hanno la seguente forma

$$N = \begin{pmatrix} J_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J_{d_1} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} J'_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J'_{d_2} \end{pmatrix}$$

ed i blocchi J_k e J'_k hanno la forma

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad J'_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

inoltre la matrice N è **nilpotente** cioè esiste un $p > 0$ finito tale che $N^{p-1} \neq \mathbf{0}$ e $N^p = \mathbf{0}$. Questo fatto verrà sfruttato per definire l'indice di Kroneker.

Osservazione

Per come è definita si ha sempre $p \geq 2$.

Torniamo ora alla DAE lineare

$$F\mathbf{x}'(t) + G\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)$$

Se (F, G) è un pencil regolare allora usando U e V che mi portano il pencil alla forma normale otteniamo

$$UFVV^{-1}\mathbf{x}'(t) + UGVV^{-1}\mathbf{x}(t) = U\mathbf{h}(t)$$

ponendo $(\mathbf{u}(t); \mathbf{v}(t)) = V^{-1}\mathbf{x}(t)$ ed $(\mathbf{a}(t); \mathbf{b}(t)) = U^{-1}\mathbf{h}(t)$ possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}'(t) \\ \mathbf{v}'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{pmatrix}$$

o meglio

$$\mathbf{u}'(t) + C\mathbf{u}(t) = \mathbf{a}(t)$$

$$N\mathbf{v}'(t) + \mathbf{v}(t) = \mathbf{b}(t)$$

Soluzione di $u'(t) + Cu(t) = a(t)$

L'equazione differenziale

$$u'(t) + Cu(t) = a(t)$$

ha formalmente la seguente soluzione tramite la matrice esponenziale

$$u(t) = \exp(-Ct)u(0) + \int_0^t \exp(C(s-t))a(s)ds$$

dove

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots$$

Soluzione di $N\mathbf{v}'(t) + \mathbf{v}(t) = \mathbf{b}(t)$

L'equazione differenziale

$$N\mathbf{v}'(t) + \mathbf{v}(t) = \mathbf{b}(t)$$

è ancora una DAE ma la matrice N è nilpotente, possiamo allora considerare le sue derivate

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{b}(t) - N\mathbf{v}'(t) \\ &= \mathbf{b}(t) - N \frac{d}{dt}(\mathbf{b}(t) - N\mathbf{v}'(t)) = \mathbf{b}(t) - N\mathbf{b}'(t) + N^2\mathbf{v}''(t) \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k N^k \mathbf{b}^{(k)}(t) - (-1)^n N^n \mathbf{v}^{(n)}(t) \end{aligned}$$



Sfruttando il fatto che N è nilpotente per $n = q$ abbiamo $N^q = \mathbf{0}$ e quindi

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k N^k \mathbf{b}^{(k)}(t)$$

Di fatto abbiamo dovuto fare $q - 1$ derivate per eliminare la dipendenza circolare di $\mathbf{v}(t)$ con le sue derivate. In questo modo abbiamo calcolato la soluzione $\mathbf{v}(t)$. Se facciamo una ulteriore derivata otteniamo una equazione differenziale ordinaria.

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{f}(t) = - \sum_{k=1}^q (-1)^k N^k \mathbf{b}^{(k)}(t)$$

Di fatto q è il numero minimo di derivate della DAE (o parte della stessa) che devo fare per trasformare la DAE in una ODE. Questo numero prende il nome di **Indice di Kroneker**. Generalizzando questa idea al caso non lineare otterremo l'**indice differenziale** della DAE.



Soluzione generale

Ricordando che $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{u}(t); \mathbf{v}(t))$ otteniamo è ancora una DAE ma la matrice \mathbf{N} è nilpotente, possiamo allora considerare le sue derivate

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \exp(-\mathbf{C}t)\mathbf{u}(0) + \int_0^t \exp(\mathbf{C}(s-t))\mathbf{a}(s)ds \\ \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \mathbf{N}^k \mathbf{b}^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

Inoltre la condizione iniziale di $\mathbf{v}(0)$ è determinata e non si può fissare liberamente:

$$\mathbf{v}(0) = \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \mathbf{N}^k \mathbf{b}^{(k)}(0)$$

questo implica a sua volta che non posso fissare $\mathbf{x}(0)$ liberamente.



L'indice Differenziale di una DAE

Consideriamo la seguente generica DAE

$$f(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t) = \mathbf{0}$$

in generale $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} f(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t)$ è singolare e quindi non è possibile **ricavare** $\mathbf{x}'(t)$ e ottenere una ODE. Se consideriamo però il le seguenti derivate successive

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}'} \mathbf{x}''(t) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\mathbf{0} = \frac{d^2}{dt^2} f(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t)$$

⋮

$$\mathbf{0} = \frac{d^q}{dt^q} f(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t)$$

potremmo trovare una selezione di righe che permetto di ricavare $\mathbf{x}'(t)$ come funzione di $\mathbf{x}(t)$ e t .

L'indice Differenziale di una DAE

Ad esempio se consideriamo la seguente DAE

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

una prima derivata

$$x'(t) = \cos(t)$$

$$x''(t) + y'(t) = 0$$

permette di ricavare $y'(t) = -x''(t)$. Una seconda derivata

$$x''(t) = -\sin(t)$$

$$x'''(t) + y''(t) = 0$$

permette di ricavare $x''(t) = -\sin(t)$ e quindi $y'(t) = \sin(t)$.



L'indice Differenziale di una DAE

Definizione (Indice differenziale)

Data una DAE $f(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t) = \mathbf{0}$ diremo che ha indice differenziale q se il seguente sistema di derivate

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t) = \mathbf{0}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t) = \mathbf{0}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^q}{dt^q} f(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), t) = \mathbf{0}$$

è il più piccolo sistema che permette di ricavare $\mathbf{x}'(t)$ in funzione di $\mathbf{x}(t)$ e t .

DAE in forma semi-esplicita

Una DAE in generale si scrive come

$$f(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$$

dove

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{A}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$$

è matrice singolare. Conviene considerare però delle classi di DAE in una forma meno generale ma utile nelle applicazioni. Ad esempio

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$$

dove $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ è matrice singolare. Esistono però in letteratura delle forme particolari semi-esplicite per le DAE di indice 0, 1, 2 e 3.

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 0 e 1

Una DAE di indice 0 per definizione è una ODE, una DAE di indice 1 in forma semi esplicita è la seguente

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

dove $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+1}, \mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{g} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+1}, \mathbb{R}^m)$. Inoltre \mathbf{g} deve essere regolare cioè

$$\mathbf{g}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}}$$

è matrice **non singolare**. In questo caso applicando il **teorema della funzione implicita** (vedi prossimo lucido) possiamo determinare \mathbf{y} in funzione di \mathbf{x} e quindi ottenere una ODE:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(\mathbf{x}(t), t), t)$$



Teorema della funzione implicita

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ aperto e $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$ sia inoltre

- 1 $(x_0, y_0) \in A$;
- 2 $f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$;
- 3 $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ non singolare.

Allora esistono due aperti $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ e una funzione $\phi : U \mapsto V$ tali che

- $y_0 = \phi(x_0)$;
- $f(x, y) = \mathbf{0}$ e solo se $y = \phi(x)$ (per $x \in U$ e $y \in V$);
- $\phi \in C^1(U, V)$ e vale

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = - \left(\frac{\partial f(x, \phi(x))}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f(x, \phi(x))}{\partial x}$$

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 2

(1/3)

Una DAE di indice 1 di fatto è una ODE con dei parametri da determinare implicitamente, ben diversa è la natura della DAE di indice 2

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$$

dove $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+1}, \mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{g} \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^m)$.

Inoltre

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}}$$

è matrice **non singolare**. In questo caso non possiamo applicare il **teorema della funzione implicita** per determinare \mathbf{y} in funzione di \mathbf{x} .

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 2

(2/3)

Per verificare l'indice deriviamo una prima volta il vincolo

$$\frac{dg(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial g(x(t), t)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial g(x(t), t)}{\partial t} = \mathbf{0}$$

e da questo otteniamo il nuovo vincolo (nascosto)

$$h(x, y, t) = \mathbf{0}$$

dove

$$h(x, y, t) = \frac{\partial g(x, t)}{\partial x} f(x, y, t) + \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}$$

Otteniamo così la nuova DAE

$$x' = f(x, y, t)$$

$$\mathbf{0} = h(x, y, t)$$

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 2

(3/3)

Avendo derivato una volta il vincolo questa DAE dovrebbe essere di indice 1

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

per verificarlo deve essere

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}}$$

non singolare

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 3

(1/3)

Una DAE di indice 3 semi esplicita prende la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{h}(\mathbf{y}, t)$$

dove

$$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m \quad \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+p+1}, \mathbb{R}^n) \quad \mathbf{g} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+1}, \mathbb{R}^m) \quad \mathbf{h} \in C^1(\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{R}^n)$$

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 3

(2/3)

Per verificare l'indice deriviamo una prima volta il vincolo

$$\frac{dh(\mathbf{y}(t), t)}{dt} = \frac{\partial h(\mathbf{y}(t), t)}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{y}'(t) + \frac{\partial h(\mathbf{y}(t), t)}{\partial t} = \mathbf{0}$$

e da questo otteniamo il nuovo vincolo (nascosto)

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{0}$$

dove

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{\partial h(\mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \frac{\partial h(\mathbf{y}, t)}{\partial t}$$

Otteniamo così la nuova DAE

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$



DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 3

(3/3)

La DAE

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

è di indice 2 se

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{z}}$$

è non singolare, cioè

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}} \times \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{x}} \times \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)}{\partial \mathbf{z}}$$

è non singolare.



DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice μ (nella forma di Hessemberg)

La DAE

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_\mu, t)$$

$$\mathbf{x}'_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, t)$$

\vdots

$$\mathbf{x}'_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_{\mu-1}, t) \quad k = 3, \dots, \mu - 1$$

\vdots

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}_\mu(\mathbf{x}_{\mu-1}, t)$$

dove se

$$\frac{\partial \mathbf{f}_\mu}{\partial \mathbf{x}_{\mu-1}} \times \frac{\partial \mathbf{f}_{\mu-1}}{\partial \mathbf{x}_{\mu-2}} \times \dots \times \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} \times \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_\mu}$$

è non singolare allora la DAE ha indice μ .



Un esempio semplice

Consideriamo la seguente DAE

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

Che ha come unica soluzione

$$x(t) = \sin(t)$$

$$y(t) = -\cos(t)$$

E scritta come DAE lineare $\mathbf{F}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{G}\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere la DAE in forma normale di Kronecker

$$\mathbf{N} \begin{pmatrix} y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \mathbf{I} \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

poiché $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ abbiamo che una DAE di indice 2. Notiamo inoltre che non bisogna specificare il dato iniziale perché nella forma normale il blocco \mathbf{C} è assente.

Valori iniziali consistenti

Riconsideriamo

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

I valori x_0 e y_0 sono valori iniziali consistenti se soddisfano il vincolo

$$x(t) = \sin(t)$$

ed il vincolo nascosto ottenuto derivando il vincolo precedente

$$-y(t) = x'(t) = \cos(t)$$

Quindi le condizioni iniziali consistenti sono

$$x_0 = \sin(0)$$

$$y_0 = -\cos(0)$$

Metodo di Eulero esplicito

Consideriamo la ODE $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, il metodo di Eulero esplicito prende la forma

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k, t_k)$$

Applicato alla DAE risulta in ($t_k = kh$)

$$0 = h(\sin(t_k) - x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - hy_k$$

Non è un metodo applicabile, non si ottiene y_{k+1} .

Metodo di Eulero implicito

Per $x' = f(x, t)$, il metodo di Eulero implicito prende la forma

$$x_{k+1} - hf(x_{k+1}, t_{k+1}) = x_k$$

Applicato alla DAE risulta in ($t_k = kh$)

$$h(\sin(t_{k+1}) - x_{k+1}) = 0$$

$$x_{k+1} + hy_{k+1} = x_k$$

Da cui segue

$$x_{k+1} = \sin(t_{k+1})$$

$$y_{k+1} = (x_k - \sin(t_{k+1}))/h$$

$$= (\sin(t_k) - \sin(t_{k+1}))/h = -\cos(t_{k+1}) + \mathcal{O}(h)$$



Metodo di Crank-Nicolson

$$\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{h} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)}{2}$$

Applicato alla DAE risulta in

$$\sin(t_{k+1}) - x_{k+1} = x_k - \sin(t_k)$$

$$x_{k+1} - \frac{h}{2}y_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}y_k$$

Da cui segue

$$x_{k+1} = \sin(t_{k+1}) + \sin(t_k) - x_k$$

$$y_{k+1} = \frac{2}{h}(x_k - x_{k+1}) - y_k$$

Inoltre risolvendo la relazione per x_k

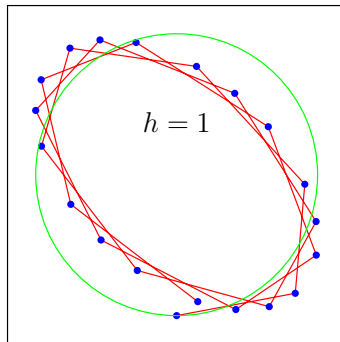
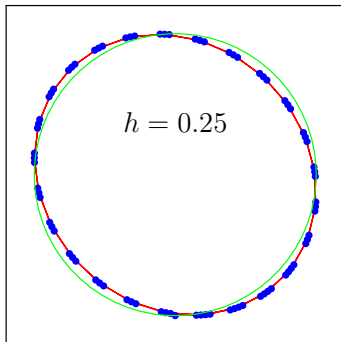
$$x_k = \sin(t_k) + (-1)^k x_0$$



Risultati con Eulero implicito

Dato iniziale consistente:

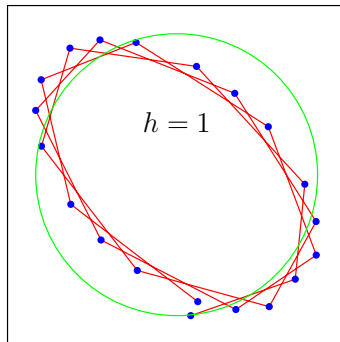
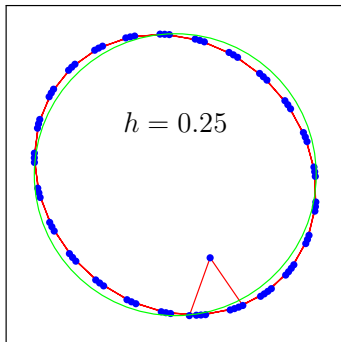
Metodo Eulero Implicito $x_0 = 0, y_0 = -1$



Risultati con Eulero implicito

Dato iniziale **inconsistente**:

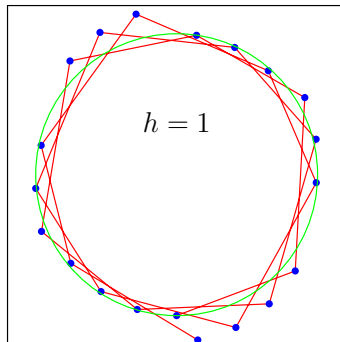
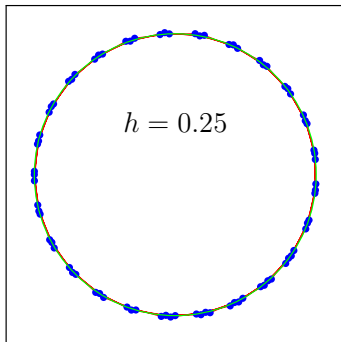
Metodo Eulero Implicito $x_0 = 0.1, y_0 = -1$



Risultati con Crank-Nicolson

Dato iniziale consistente:

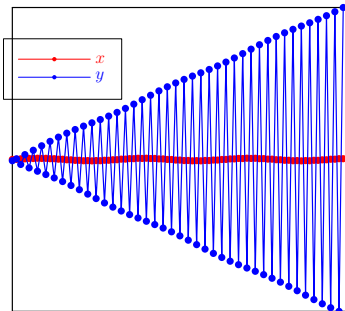
Metodo di Crank-Nicolson $x_0 = 0, y_0 = -1$



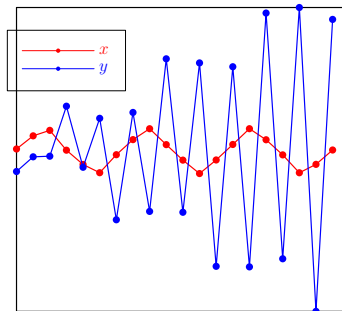
Risultati con Crank-Nicolson

Dato iniziale **inconsistente**:

Metodo di Crank–Nicolson $x_0 = 0.1, y_0 = -1$



$h = 1$



$h = 0.25$

Un esempio semplice

Stabilizzazione alla Baumgarten

Ri-consideriamo la DAE

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

e stabilizziamo il vincolo $x(t) - \sin(t) = 0$ alla Baumgarten

$$\tau(x(t) - \sin(t))' + (x(t) - \sin(t)) = 0$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

Osservazione

L'equazione $\tau z'(t) + z(t) = 0$ ha come soluzione

$$z(t) = z(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

e $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$

Un esempio semplice

Stabilizzazione alla Baumgarten

Discretizzando con Crank-Nicolson

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{h}(x_{k+1} - x_k) - \frac{\tau}{h}(\sin(t_{k+1}) - \sin(t_k)) + \\ \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k) - \frac{1}{2}(\sin(t_{k+1}) + \sin(t_k)) = 0 \\ \frac{x_{k+1} - x_k}{h} + \frac{y_{k+1} + y_k}{2} = 0 \end{aligned}$$

e risolvendo rispetto a x_{k+1} e y_{k+1}

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{2\tau - h}{2\tau + h}(x_k - \sin(t_k)) + \sin(t_{k+1}) \\ y_{k+1} &= \frac{\sin(t_k)(4\tau - 2h) - \sin(t_{k+1})(4\tau + 2h) + 4hx_k}{h(2\tau + h)} - y_k \end{aligned}$$

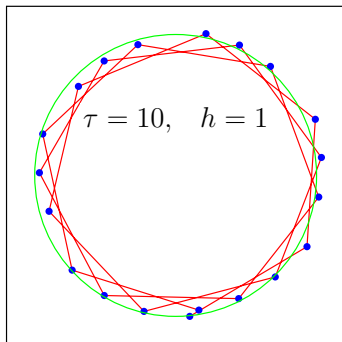
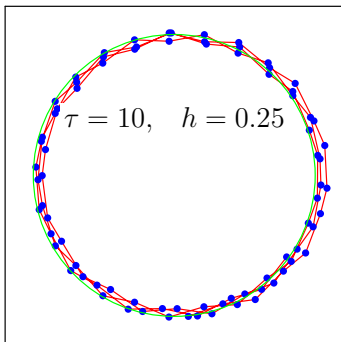
Risultati con Crank-Nicolson

Stabilizzazione alla Baumgarten

(1/2)

Dato iniziale **inconsistente**:

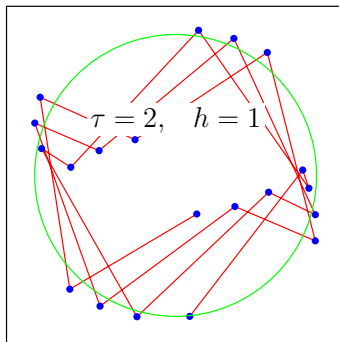
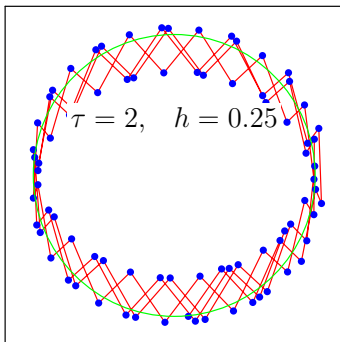
Metodo di Crank-Nicolson $x_0 = 0.1, y_0 = -1$



Risultati con Crank-Nicolson

Stabilizzazione alla Baumgarten

(2/2)

Dato iniziale **inconsistente**:Metodo di Crank-Nicolson $x_0 = 0.1, y_0 = -1$ 

Commenti

- Il metodo di Eulero implicito sembra funzionare anche con dati inconsistenti
- Il metodo di Crank-Nicolson non funziona se i dati iniziali sono inconsistenti
- La stabilizzazione alla Baumgarten funziona bene ma non esiste una ricetta generale per determinare a priori τ !

Il pendolo semplice

Le equazioni

Consideriamo una massa m vincolata a stare su una circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$. La sua lagrangiana e il vincolo diventano

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

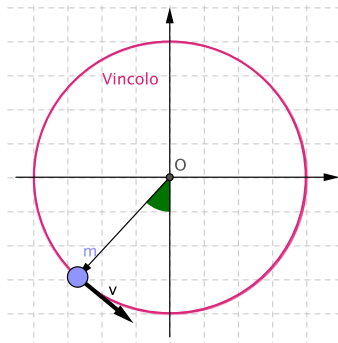
$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

e le equazioni del moto diventano

$$m\ddot{x} + 2x\lambda = 0$$

$$m\ddot{y} + 2y\lambda + mg = 0$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Calcolo dell'indice

(1/2)

Dividendo per m e ponendo $\mu = -2\lambda/m$ le equazioni diventano

$$\ddot{x} = \mu x$$

$$\ddot{y} = \mu y - g$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ponendo $u = \dot{x}$ e $v = \dot{y}$ trasformiamo il sistema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Calcolo dell'indice

(2/2)

Derivando una prima volta il vincolo

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad xu + yv = 0$$

Derivando una seconda volta il vincolo

$$x\dot{u} + y\dot{v} + \dot{x}u + \dot{y}v = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\mu(x^2 + y^2) - gy + (u^2 + v^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad r^2\mu - gy + (u^2 + v^2) = 0$$

Derivando una terza volta otteniamo l'equazione differenziale per μ

$$r^2\dot{\mu} - gv + 2(u\dot{u} + v\dot{v}) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$r^2\dot{\mu} - gv + 2\mu(ux + vy) - 2gv = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$r^2\dot{\mu} - 3gv = 0$$

la DAE ha indice 3

DAE con i vincoli

DAE originaria

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Vincoli nascosti

$$xu + yv = 0$$

$$r^2\mu - gy + (u^2 + v^2) = 0$$

Equazione differenziale associata al vincolo

$$r^2\dot{\mu} - 3gv = 0$$

Integro la ODE senza stabilizzazione

Consideriamo la ODE senza stabilizzazione

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$\dot{\mu} = 3gv/r^2$$

Integrando ad esempio con Eulero
Implicito otteniamo le seguenti equazioni

alle differenze

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \mu_{k+1} x_{k+1}$$

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{h} = \mu_{k+1} y_{k+1} - g$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = u_{k+1}$$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = v_{k+1}$$

$$\frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{h} = \frac{3gv_{k+1}}{r^2}$$



Integro la ODE senza stabilizzazione

Risolviendo le prime 4 equazioni per x_{k+1} , y_{k+1} , u_{k+1} e v_{k+1} otteniamo

$$c_{k+1} = 1 - h^2 \mu_{k+1}$$

$$x_{k+1} = (x_k + hu_k)/c_{k+1}$$

$$y_{k+1} = (y_k + hv_k - gh^2)/c_{k+1}$$

$$u_{k+1} = (u_k + h\mu_{k+1}x_k)/c_{k+1}$$

$$v_{k+1} = (v_k + h\mu_{k+1}y_k - gh)/c_{k+1}$$

e sostituendo nella equazione del moltiplicatore e ponendo $\delta = \mu_{k+1} - \mu_k$ otteniamo una equazione quadratica in δ da risolvere:

$$r^2 h^2 \delta^2 + (3gh^2 y_k + r^2 (h^2 \mu_k - 1)) \delta + 3gh(v_k + y_k \mu_k h - gh) = 0$$

Poichè δ deve essere Tra le due soluzioni scegliamo quella più vicina al passo esplicito cioè $\delta \approx 3hgv_k/r^2$

Integro la DAE senza stabilizzazione

Il metodo di Eulero implicito senza stabilizzazione semplicemente non funziona e da risultati sballati. Il fatto è che subito viene violato il vincolo $x^2 + y^2 = r^2$.

Consideriamo la DAE senza stabilizzazione

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Integrando ad esempio con Eulero Implicito otteniamo le seguenti equazioni

alle differenze

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \mu_{k+1} x_{k+1}$$

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{h} = \mu_{k+1} y_{k+1} - g$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = u_{k+1}$$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = v_{k+1}$$

$$x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = r^2$$



Integro la ODE senza stabilizzazione

Risolviendo le prime 4 equazioni per x_{k+1} , y_{k+1} , u_{k+1} e v_{k+1} otteniamo ancora

$$c_{k+1} = 1 - h^2 \mu_{k+1}$$

$$x_{k+1} = (x_k + hu_k)/c_{k+1}$$

$$y_{k+1} = (y_k + hv_k - gh^2)/c_{k+1}$$

$$u_{k+1} = (u_k + h\mu_{k+1}x_k)/c_{k+1}$$

$$v_{k+1} = (v_k + h\mu_{k+1}y_k - gh)/c_{k+1}$$

e sostituendo nella equazione del vincolo una equazione quadratica in μ_{k+1} da risolvere:

$$\begin{aligned} & x_k^2 + y_k^2 - r^2 + 2h(x_k u_k + y_k v_k) + h^2(u_k^2 + v_k^2) \\ & + g^2 h^4 - 2gh^2(y_k + hv_k) + 2h^2 \mu_{k+1} - h^4 \mu_{k+1}^2 = 0 \end{aligned}$$



Integro la ODE senza stabilizzazione

$$\underbrace{[x_k^2 + y_k^2 - r^2]}_A + 2h \underbrace{(x_k u_k + y_0 v_k)}_B + h^2 (u_k^2 + v_k^2) + g^2 h^4 - 2gh^2 (y_k + hv_k) + 2h^2 \mu_{k+1} - h^4 \mu_{k+1}^2 = 0$$

Poiché nel discreto il vincolo è risolto esattamente il blocco (A) può essere messo a 0. Il blocco (B) rappresenta la derivata del vincolo che non necessariamente è 0 nel discreto. Otteniamo quindi

$$2(x_k u_k + y_0 v_k) + h(u_k^2 + v_k^2) + g^2 h^3 - 2gh(y_k + hv_k) + 2h\mu_{k+1} - h^3 \mu_{k+1}^2 = 0$$

Risolviendo la quadratica

$$\mu_{k+1} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + A}}{h^2 r}$$

$$A = g^2 h^4 + 2h(x_k u_k + y_k v_k) - 2gh^2 (y_k - hv_k) + h^2 (u_k^2 + v_k^2)$$



Integro la ODE senza stabilizzazione

Poiché μ rappresenta la forza centripeta che mantiene la massa sul vincolo so già che devo scegliere la soluzione negativa e quindi Risolvendo la quadratica per la radice negativa e riscrivendo in modo da evitare cancellazioni otteniamo

$$A = g^2 h^4 + 2h(x_k u_k + y_k v_k) - 2gh^2(y_k - hv_k) + h^2(u_k^2 + v_k^2)$$
$$\mu_{k+1} = \frac{-A}{h^2(r^2 + r\sqrt{r^2 + A})} = \frac{-A/r^2}{h^2(1 + \sqrt{1 + A/r^2})}$$

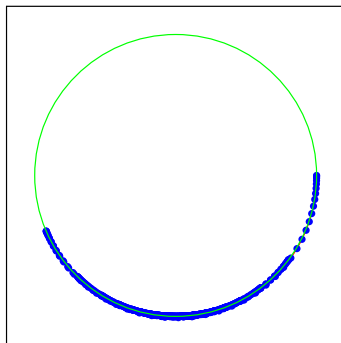
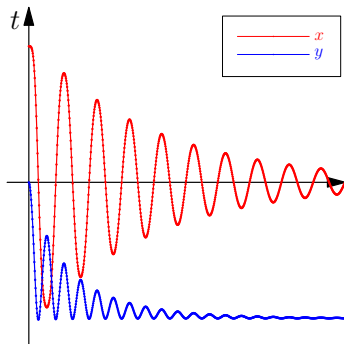


Risultati con Eulero-Implicito

DAE integrata senza stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**:

Metodo Eulero Implicito $x_0 = 1, y_0 = u_0 = v_0 = 0, h = 0.025$



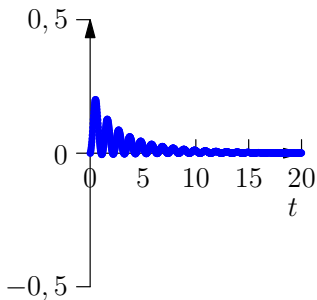
Risultati con Eulero-Implicito

DAE integrata senza stabilizzazione

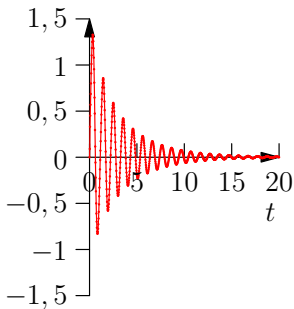
Dato iniziale **consistente** $x_0 = 1, y_0 = 0, u_0 = 0, v_0 = 0$

Metodo Eulero Implicito $x_0 = 1, y_0 = u_0 = v_0 = 0, h = 0.025$

Violazione primo vincolo



Violazione secondo vincolo



Un esempio complicato

Stabilizzazione alla Baumgarten

Il metodo di Eulero implicito senza stabilizzazione funziona ma è troppo dissipativo. Per poter utilizzare il metodo di Cranck-Nicolson bisogna stabilizzare i vincoli. Poiché la DAE è di indice 3 dovremmo stabilizzare il vincolo con una equazione del terzo ordine come segue:

$$\frac{d^3 V(x, y)}{dt^3} + a \frac{d^2 V(x, y)}{dt^2} + b \frac{dV(x, y)}{dt} + cV(x, y) = 0$$

dove $V(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$. Dove a, b, c sono scelti in modo che

$$z'''(t) + az''(t) + bz'(t) + cz(t) = 0$$

abbia $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

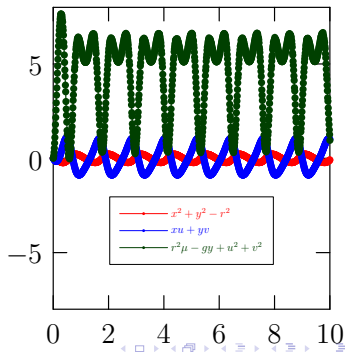
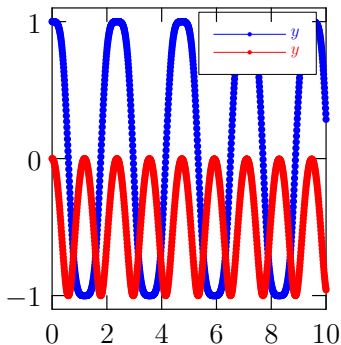
Risultati con Crank-Nicolson stabilizzato

DAE integrata senza stabilizzazione

Dato iniziale **consistente** e valori di stabilizzazione $a = 30$, $b = 300$, $c = 1000$.

Metodo di Crank-Nicolson stabilizzato $h = 0.01$

Dato iniziale $x_0 = 1$, $y_0 = u_0 = v_0 = 0$



Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 1 scelta delle coordinate indipendenti

Riconsideriamo le equazioni del pendolo in coordinate sovrabbondanti

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Possiamo usare il vincolo per determinare ad esempio y in funzione di x come segue

$$y(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

posso quindi eliminare la equazione del vincolo (dal sistema) e sostituire formalmente al posto di y la sua funzione $y(x)$.

Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 2 propagazione del vincolo

Elimino la equazione del vincolo (dal sistema) e sostituisco y con la sua funzione $y(x)$.

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y(x) - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$y(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Derivando l'equazione del vincolo posso derivare una equazione per $\dot{y}(x)$

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad \implies \quad \dot{y} = -x\dot{x}/y \quad \implies \quad v = -xu/y$$

e quindi ottenere

$$\dot{y} = v(x, u) = -\frac{xu}{y(x)}$$



Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 2 propagazione del vincolo

Sostituisco \dot{y} con la sua funzione $v(x, u)$ nella quarta equazione ottenendo

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y(x) - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$v(x, u) = -\frac{xu}{y(x)}$$

$$y(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 2 propagazione del vincolo

Derivando ancora una volta il vincolo ottengo una equazione per $\ddot{y} = \dot{v}$

$$x\dot{u} + y\dot{v} + \dot{x}u + \dot{y}v = 0 \quad \implies$$

$$\mu(x^2 + y^2) - gy + (u^2 + v^2) = 0$$

da qui posso ricavare μ come funzione di x ed u

$$\mu(x, u) = \frac{gy(x) - (u^2 + v(x, u)^2)}{r^2}$$

posso quindi scrivere $\mu = \mu(x, u)$ nelle equazioni ed eliminare

$$\dot{v}(x, u) = \mu(x, u)y(x) - g$$

perché è una equazione algebrica ridondante per $\mu(x, u)$

Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 2 propagazione del vincolo

Sostituisco $\mu = \mu(x, u)$

$$\dot{u} = \mu(x, u)x$$

$$\dot{x} = u$$

$$\mu(x, u) = \frac{gy(x) - (u^2 + v(x, u)^2)}{r^2}$$

$$v(x, u) = -\frac{xu}{y(x)}$$

$$y(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

di fatto abbiamo ottenuto sistema di ODE costituito da 2 equazioni ed $\mu(x, u)$ è calcolato ricorsivamente.

Collatz e RK4

A questo punto possiamo anche usare un integratore esplicito, tipo Collatz

$$u_{k+1/2} = u_k + (h/2)\mu(x_k, u_k)x_k$$

$$x_{k+1/2} = k_k + (h/2)u_k$$

$$u_{k+1} = u_k + (h/2)\mu(x_{k+1/2}, u_{k+1/2})x_{k+1/2}$$

$$x_{k+1} = k_k + (h/2)u_{k+1/2}$$

Collatz e RK4

○ il classico Runge-Kutta del quarto ordine

$$K_1 = hu_k$$

$$L_1 = h\mu(x_k, u_k)$$

$$K_2 = h(u_k + L_1/2)$$

$$L_2 = h\mu(x_k + K_1/2, u_k + L_1/2)(x_k + K_1/2)$$

$$K_3 = h(u_k + L_2/2)$$

$$L_3 = h\mu(x_k + K_2/2, u_k + L_2/2)(x_k + K_2/2)$$

$$K_4 = h(u_k + L_3)$$

$$L_4 = h\mu(x_k + K_3, u_k + L_3) * (x_k + K_3)$$

$$x_{k+1} = x_k + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$$

$$u_{k+1} = u_k + (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)/6$$



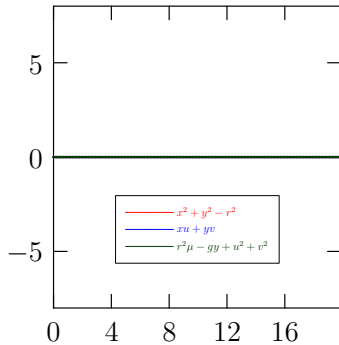
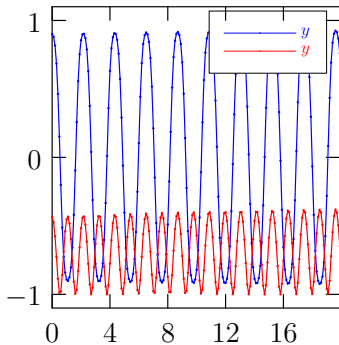
Risultati con Collatz

DAE integrata con coordinate partitioning

Dato iniziale **consistente**:

Metodo di Collatz e Coordinate Partitioning $h = 0.1$

Dato iniziale $x_0 = 0.9, u_0 = 0$



Risultati con RK4

DAE integrata con coordinate partitioning

Dato iniziale **consistente**:

Metodo di Runge–Kutta e Coordinate Partitioning $h = 0.1$

Dato iniziale $x_0 = 0.9, u_0 = 0$

