

COGNOME NOME N. Matricola

Esercizio 1

Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- i) calcolare la fattorizzazione LU (con pivoting) di \mathbf{A} ;
- ii) usando la fattorizzazione LU di \mathbf{A} risolvere il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e lo *splitting* $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ii) Scrivere esplicitamente ($x^{k+1} = \dots$, $y^{k+1} = \dots$) il metodo iterativo

$$\mathbf{Px}^{k+1} = \mathbf{b} + \mathbf{Qx}^k$$

i) Studiare la convergenza del metodo iterativo; (suggerimento $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}||\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$)

iii) Partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni.

Esercizio 3

Data la seguente equazione non lineare

$$2 - e^{x^2} = 0$$

- i) Scrivere il metodo di Newton per questa particolare equazione;
- ii) Approssimare una soluzione con 2 iterate del metodo a partire da $x_0 = 1$;

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella $\frac{x_i}{y_i} \left| \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 20 & 272 \end{array} \right.$ calcolare

- i) La tabella delle differenze divise;
- ii) Il polinomio interpolante e polinomi $p_k(x)$ che interpolano i punti (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \dots, k$.

Esercizio 5

Dato il seguente integrale

$$\int_0^2 f(x)dx, \quad f(x) = x \sin 3x$$

- i) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di 10^{-6} ;
- ii) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo di Simpson sia minore di 10^{-6} ;
- iii) Calcolare l'integrale con il metodo dei Trapezi e 4 intervalli;

Esercizio 6

Dato il metodo multistep definito dalle tabelle

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_{-1} & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1/2 & 6 & -1 & 6 & 1/2 \end{array}$$

- i) Calcolare l'ordine del metodo;
- ii) Scrivere esplicitamente il metodo multistep applicato alla ODE $q'(t) = tq(t)$, $q(0) = 0$;