

COGNOME NOME N. Matricola

Esercizio 1

Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- i) calcolare la fattorizzazione LU (con pivoting) di \mathbf{A} ;
- ii) usando la fattorizzazione LU di \mathbf{A} risolvere il sistema lineare

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ e lo *splitting* $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

i) Scrivere esplicitamente ($x^{k+1} = \dots$, $y^{k+1} = \dots$) il metodo iterativo

$$\mathbf{Px}^{k+1} = \mathbf{b} + \mathbf{Qx}^k$$

ii) Studiare la convergenza del metodo iterativo; (suggerimento $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}||\lambda\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$)

iii) Partendo dal vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ fare due iterazioni.

Esercizio 3

Data la seguente equazione non lineare

$$x \sin x - e^x = 0$$

- i) Scrivere il metodo di Newton per questa particolare equazione;
- ii) Approssimare una soluzione con 2 iterate del metodo a partire da $x_0 = 1$;

Esercizio 4

Per i dati contenuti nella tabella $\frac{x_i}{y_i} \left| \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -9 & 7 & 51 & 167 \end{array} \right.$ calcolare

- i) La tabella delle differenze divise;
- ii) Il polinomi intermedi $p_k(x)$ che interpolano i punti (x_i, y_i) con $i = 0, 1, \dots, k$.
- iii) Il polinomio interpolante $p(x)$.

Esercizio 5

Dato il seguente integrale

$$\int_{-2}^1 f(x)dx, \quad f(x) = x^2 + e^x \sin x$$

- i) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo dei trapezi sia minore di 10^{-4} ;
- ii) Stimare il numero di intervalli necessari affinché l'errore dell'integrale approssimato con il metodo di Simpson sia minore di 10^{-4} ;
- iii) Calcolare l'integrale con il metodo di Simpson e 4 intervalli (piccoli);

Esercizio 6

Si consideri la seguente ODE

$$y'(x) = x + y(x), \quad y(0) = 1.$$

e il metodo di Runge Kutta definito dal tableau:

$$(A) \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \quad (B) \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- i) Calcolare l'ordine del metodo numerico associato al tableau (A)
- ii) Scrivere esplicitamente il metodo numerico associato al tableau (B)
- iii) Fare un passo del metodo numerico con passo $h = 1/2$ associato al tableau (B)