PROPRIETÀ DELLE MATRICI DI FROBENIUS

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{ esimo posizione} \qquad v^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Matrice Frobenius è della forma

$$I + v^{(k)} e_k^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \, \\ \, \\ \, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}}_{\text{rango } 1}$$

PROPRIETA' (INVERSA)

$$\left(I + v^{(k)} e_k^T\right)\left(I - v^{(k)} e_k^T\right) = I + \cancel{v^{(k)}} e_k^T - \cancel{v^{(k)}} e_k^T + \underbrace{v^{(k)} e_k^T v^{(k)} e_k^T}$$

$$v^{(k)} e_k^T v^{(k)} e_k^T = v^{(k)} \underbrace{\left(e_k^T v^{(k)}\right)}_{1\times 1} e_k^T = 0$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-esimo}}}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (0)$$

$$\underset{F}{\left(I + v^{(k)} e_k^T\right)} \underset{F^{-1}}{\left(I - v^{(k)} e_k^T\right)} = I$$

PROPRIETÀ (INVERSA BIS)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 13 & 16 \\ 19 & 21 \\ \hline 33 & 34 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^T & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} E \\ \hline f^T \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} G \\ \hline h^T \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} G &= AE + b f^T \\ h^T &= c^T E + d f^T \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad d = (9) \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h^T = (7 \ 8)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (9)(2 \ 3) = (15 \ \ 7) + (18 \ \ 27)$$
$$= (33 \ \ 34)$$

PROPRIETA' (INVERSA BIS)

$$F = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline v & I \end{array}\right) = I + \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} e_1^T = I + \hat{v} e_1^T$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline v & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline -v & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline v-v & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & \underbrace{I}_{I_{n-1}} \end{array}\right) = \underbrace{I}_{I_n}$$

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & k\text{-esima colonna} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & v & I \end{array}\right) \end{array} = I + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} e_k^T$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & v & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & -v & I \end{array}\right) = I$$

UTILIZZO DELLA PRECEDENTE PROPRIETÀ

$$L_k = I + v^{(k)} e_k^T$$

$$L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_2 L_1 = \left(I + v^{(n-1)} e_{n-1}^T\right) \cdots \left(I + v^{(1)} e_1^T\right)$$

$$\left(L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_2 L_1\right)^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1}$$

$$= \underbrace{\left(I - v^{(1)} e_1^T\right)\left(I - v^{(2)} e_2^T\right) \cdots \left(I - v^{(n-1)} e_{n-1}^T\right)}_{\text{serve proprietà per calcolare efficientemente questo prodotto}}$$

PROPRIETA' DEI PRODOTTI

$$(I + v^{(k)} e_k^T)(I + v^{(j)} e_j^T)$$

$$= I + v^{(k)} e_k^T + v^{(j)} e_j^T + \boxed{v^{(k)} e_k^T v^{(j)} e_j^T}$$

$$e_k^T v^{(j)} = \begin{array}{c} \text{k-esimo} \\ (0 - 0\ 1\ 0 - 0) \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ v_{j+1} \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq j \\ v_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(I + v^{(k)} e_k^T)(I + v^{(j)} e_j^T) = I + v^{(k)} e_k^T + v^{(j)} e_j^T$$

se $k \leq j$

GENERALIZZAZIONE

$$\left(I + v^{(1)} e_1^T + v^{(2)} e_2^T + \cdots + v^{(k)} e_k^T\right)\left(I + v^{(j)} e_j^T\right)$$

$$= I + v^{(1)} e_1^T + v^{(2)} e_2^T + \cdots + v^{(k)} e_k^T + v^{(j)} e_j^T$$

$$L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \left(I - v^{(1)} e_1^T\right)\left(I - v^{(2)} e_2^T\right) \cdots \left(I - v^{(n-1)} e_{n-1}^T\right)$$

$$= I - v^{(1)} e_1^T - v^{(2)} e_2^T - \quad - v^{(n-1)} e_{n-1}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ | & 1 & & & & \\ v^{(1)} & v^{(2)} & 1 & & & \\ & & v^{(3)} & & & \\ & & & & 1 & \\ | & | & | & & v^{(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$

FROBENIUS + PERMUTAZIONE

$$P\left(I+v^{(k)}e_k^T\right) = P + Pv^{(k)}e_k^T$$

$$= \left(I + Pv^{(k)}e_k^T P^{-1}\right)P$$

Se la permutazione P AGISCE solo sulle righe a partire dalla $k+1$ esima allora

$$\boxed{e_k^T P^{-1} = e_k^T}$$ PERCHE ? $\Rightarrow$ $e_k^T P^T \Rightarrow \underbrace{P e_k = e_k}$ permuta zeri

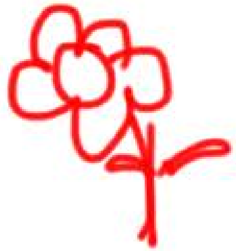
$P = S_1 S_2 \dots S_k$ [permutazione vista come prodotto di scambi]

$P^{-1} = S_k^{-1} \dots S_2^{-1} S_1^{-1}$

$= S_k \quad S_2 S_1 = P^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

FROBENIUS + PERMUTAZIONE (cont)



$$P\left(I + v^{(k)} e_k^T\right) = P + P v^{(k)} e_k^T$$

$$= \left(I + P v^{(k)} e_k^T P^{-1}\right) P$$

$$= \left(I + \tilde{v}^{(k)} e_k^T\right) P$$

$$\tilde{v}^{k} = P v^{(k)}$$

PURCHÈ P AGISCE
SULLE RIGHE A PARTIRE DALLA
K+1 - esima

RIASSUNTONE

$$L_{n-1}S_{n-1}\cdots L_2S_2L_1S_1A = U$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{L}_{n-1}\cdots\tilde{L}_2\tilde{L}_1\underbrace{S_{n-1}\cdots S_2S_1}_{P}A = U$$

$$\boxed{\tilde{L}_k^{-1} = I - v^{(k)}e_k^T}$$

$$PA = \tilde{L}_1^{-1}\tilde{L}_2^{-1}\cdots\tilde{L}_{n-1}^{-1}U = \underbrace{\left(I - v^{(1)}e_1^T - v^{(2)}e_2^T \cdots - v^{(n-1)}e_{n-1}^T\right)}_{L}U$$

$$\boxed{PA = LU}$$

FATTORIZZAZIONE LU (come usar)

problema risolvere tanti sistemi lineari con la stessa matrice dei coefficienti

$Ax = b^{(1)} \qquad Ax = b^{(2)} \qquad Ax = b^{(r)}$

$\boxed{PA = LU}$ dopo aver applicato algoritmo di Gauss

$$PAx = Pb^{(1)} \Rightarrow L\underbrace{\boxed{Ux}}_{z} = Pb^{(1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Lz = Pb^{(1)} & (A) \quad (\Delta)z = (\ ) \\ Ux = z & (B) \quad (\nabla)x = (\ ) \end{cases}$$

Risolvo in sequenza (A) poi noto z risolvo (B)

CALCOLO DEI COSTI COMPUTAZIONALI

Semplificazione: TRASCURIAMO COSTO PERMUTAZIONE

$+ - * /$ COSTANO UGUALE

Costo k esimo passo di gauss

$(n-k)$ divisioni per costruire $v^{(k)}$ $\quad v^{(k)}_j = \frac{a_{kj}}{a_{jj}}$

$\left.\begin{array}{l}(n-k)(n-k) \text{ prodotti} \\ \text{somme}\end{array}\right\}$ x aggiornamento elementi nel blocco diagonale

$$\text{costo} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[(n-k) + 2(n-k)(n-k) \right] = \frac{2}{3} n^3 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}$$

Per n "grande" il costo è dominato da n^3 e vale circa $\frac{2}{3}n^3$

Quanto costa risolvere un sistema TRIANGOLARE?

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \ell_{n1} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$(k-1)$ $\begin{cases} \text{prodotti} \\ \text{somme} \end{cases}$ alla k-esima riga

costo $2\sum_{k=2}^{n}(k-1) = n^2 - n$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \\ & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

k prodotti e divisioni

$(k-1)$ somme

costo $\sum_{k=1}^{n}(k + k-1) = n^2$

COSTO TOTALE $\sim 2n^2 - n$

CONCLUSIONE

$\frac{2}{3}n^3$ costo fattorizzazione LU

$2n^2$ costo soluzione 2 sistemi triangolari

Se risolviamo m sistemi lineari con la stessa matrice dei coefficienti applicando m volte GAUSS

$$\text{costo} = m\left(\frac{2}{3}n^3 + 2n^2\right) \sim \frac{2}{3}m\, n^3$$

1 sola LU + m volte i sistemi triangolari

$$\text{costo} = \frac{2}{3}n^3 + \underline{2mn^2} \Rightarrow \frac{2}{3}n^3$$

Molto <u>meno</u>

EXTRA BONUS

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & b^T \\ \hline a & B \end{array}\right) \qquad L = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline y & I \end{array}\right)$$

come determino y ?

$$LA = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & b^T \\ \hline a_{11} y + a & B + y b^T \end{array}\right)$$

$$a_{11} y + a = 0$$

$$y = - \boxed{\frac{1}{a_{11}} a}$$

salviamo perché è un pezzo della L finale

EXTRA BONUS (BIS)

$$A^{(k)} = \left(\begin{array}{c|c|c} U & c & d^T \\ \hline 0 & a_{kk} & b^T \\ \hline 0 & a & B \end{array}\right) \qquad L_k = \left(\begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & -\frac{a}{a_{kk}} & I \end{array}\right)$$

$$L_k A^{(k)} = \left(\begin{array}{c|c|c} U & c & d^T \\ \hline 0 & a_{kk} & b^T \\ \hline 0 & 0 & \tilde{B} \end{array}\right) \qquad \tilde{B} = B - \frac{1}{a_{kk}} a b^T$$