INTERPOLAZIONE (FITTING)

Problema: data base B

$$B = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)\}$$

Esempio
$$\left.\begin{array}{l} \phi_0(x) = 1 \\ \phi_1(x) = x \\ \phi_2(x) = x^2 \\ \vdots \\ \phi_n(x) = x^k \end{array}\right\} \text{interpolazione polinomiale}$$

e tabella di punti $\begin{array}{c|ccc} x & x_0\, x_1 & \dots & x_n \\ \hline y & y_0\, y_1 & \dots & y_n \end{array}$ $\Rightarrow$ trovare

i coefficienti $a_0\, a_1 \dots a_n$ tale che

$$f(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_n \phi(x)$$

interpolo i dati della tabella cioè

$$f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

INTERPOLAZIONE ⟹ SISTEMA LINEARE

$$B = \{ \phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x) \}$$

$$f(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_n \phi_n(x)$$

$$f(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} f(x_0) = a_0 \phi_0(x_0) + a_1 \phi_1(x_0) + \quad + a_n \phi_n(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = a_0 \phi_0(x_1) + a_1 \phi_1(x_1) + \quad + a_n \phi_n(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ f(x_n) = a_0 \phi_0(x_n) + a_1 \phi_1(x_n) + \quad + a_n \phi_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & & \phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & & \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & & \phi_m(x_1) \\ \cdots & & & \\ \phi_0(x_m) & \phi_1(x_m) & & \phi_m(x_m) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{y}}$$

$A\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{y}$ la matrice A DEVE essere NON singolare altrimenti il problema in generale non è risolvibile

Se A è NON singolare per ogni scelta dei punti $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$ (cioè per ogni scelta di punti distinti) allora $B = \{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_m\}$ si dice UNISOLVENTE.

INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE

Problema: Trovare base $B = \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ "comoda" per fare l'interpolazione.

Esempio di basi polinomiali diverse:

$$B = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, \dots, 1+x+x^2+\dots+x^n\}$$

$$B = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3, \quad , 1+x^n\}$$

CAMBIANDO BASE CAMBIA LA MATRICE DEL PROBLEMA DI INTERPOLAZIONE.

$\exists$ base per cui $Aa = y$ è facile? ad esempio A è diagonale o meglio $A = I$?

RISPOSTA = SI $\Rightarrow$ BASE DI LAGRANGE

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & & \phi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & & \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

$\phi_k(x)$ è polinomio di grado (al più) n

$$\phi_0(x) = c_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = c_0x^n+\cdots$$

$$\phi_1(x) = c_1(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = c_1x^n+\cdots$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x) = c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{n-1}) = c_nx^n+\cdots$$

Costruzione di LAGRANGE

$$e_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (x-x_k) \qquad L_k(x) = \frac{e_k(x)}{e_k(x_k)} \qquad \begin{cases} L_k(x_k) = 1 \\ L_k(x_j) = 0 \quad j\neq k \end{cases}$$

Costruzione di LAGRANGE

$$e_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_k) \qquad L_k(x) = \frac{e_k(x)}{e_k(x_k)} \qquad \begin{cases} L_k(x_k) = 1 \\ L_k(x_j) = 0 \\ \quad j \neq k \end{cases}$$

$$B = \{ L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x) \}$$

$$A = \begin{bmatrix} L_0(x_0) & L_1(x_0) & & L_n(x_0) \\ L_0(x_1) & L_1(x_1) & & L_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ L_0(x_n) & L_1(x_n) & & L_n(x_n) \end{bmatrix} = I \qquad \begin{aligned} &Aa = y \\ &\Rightarrow a = y \end{aligned}$$

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

$\Rightarrow$ Interpolare = Calcolare base di Lagrange

Esempio (PARTIAMO DALLA SOLUZIONE $x^2-\frac{1}{2}$)

x	y
0	$-1/2$
1	$1/2$
-1	$1/2$

$e_0(x) = (x-1)(x-(-1)) = x^2-1 \qquad e_0(0) = -1$

$e_1(x) = (x-0)(x-(-1)) = x^2+x \qquad e_1(1) = 2$

$e_2(x) = (x-0)(x-1) = x^2-x \qquad e_2(-1) = 2$

$$L_0(x) = \frac{e_0(x)}{e_0(0)} = 1-x^2$$

$$L_1(x) = \frac{e_1(x)}{e_1(1)} = \frac{x^2+x}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{e_2(x)}{e_2(-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$
$$= -\frac{1}{2}(1-x^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-x}{2}\right) = x^2-\frac{1}{2}$$

PROBLEMA DELL'INTERPOLAZIONE DI LAGRANGE

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_n	y_n
x_{n+1}	y_{n+1}

$\ell_0 \quad \ell_1 \quad \dots \quad \ell_n$

$L_0 \quad L_1 \quad \quad L_n$

lungo e noioso

$\Rightarrow$ facile fare errori

Se si aggiunge 1 punto

$\ell_0 \quad \ell_1 \quad \quad \ell_{n+1}$

$L_0 \quad L_1 \quad \quad L_{n+1}$

vanno ricalcolati (quasi) da 0

Esiste un modo "incrementale" di interpolare?

cioè se $p_n(x)$ interpola i primi $n+1$ punti posso calcolare facilmente $p_{n+1}(x)$? [OVVIAMENTE SI]

INTERPOLAZIONE INCREMENTALE

x	y
x_0	y_0
x_n	y_n
x_{n+1}	y_{n+1}

$p_n(x)$ interpola $(x_0, y_0)(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$

cerchiamo

$p_{n+1}(x)$ che interpola $(x_0, y_0) \dots (x_n, y_n)$ (x_{n+1}, y_{n+1})

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + q(x)$$

proprietà di $q(x)$

$$p_{n+1}(x_0) = p_n(x_0) + q(x_0) = y_0 \longrightarrow q(x_0) = 0$$

$$p_{n+1}(x_1) = p_n(x_1) + q(x_1) = y_1 \longrightarrow q(x_1) = 0$$

$$\vdots$$

$$p_{n+1}(x_n) = p_n(x_n) + q(x_n) = y_n \longrightarrow q(x_n) = 0$$

$$\Longrightarrow q(x) = c(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = c\,x^{n+1} + \dots$$

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + q(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

SCRITTO IN MATEMATICHESE...

$p_n(x) =$ polinomio interpolante primi $n+1$ punti

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + c\,\omega_{n+1}(x)$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$\left[\omega_{n+1}(x_0) = \omega_{n+1}(x_1) = \cdots = \omega_{n+1}(x_n) = 0\right]$$

La costante c si determina dalla condizione di interpolazione

$$p_{n+1}(x_j) = p_n(x_j) + c\,\underbrace{\omega_{n+1}(x_j)}_{=0} = p_n(x_j) = y_j \qquad j \le n$$

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + c\,\underbrace{\omega_{n+1}(x_{n+1})}_{\neq 0} = y_{n+1}$$

$$c = \frac{y_{n+1} - p_n(x_{n+1})}{\omega_{n+1}(x_{n+1})}$$

Esempio interpolazione incrementale

x	y
0	$-1/2$
1	$1/2$
-1	$1/2$

$$\omega_0(x) = 1$$

$$\omega_1(x) = x - x_0 = x$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = \omega_1(x)(x - x_1) = x(x-1)$$
$$= x^2 - x$$

$$p_0(x) = -\frac{1}{2}$$

$$p_1(x) = p_0(x) + C\,\omega_1(x) = -\frac{1}{2} + Cx \qquad p_1(1) = -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2}$$
$$\vdots \qquad\qquad \Rightarrow C = 1$$
$$= x - \frac{1}{2}$$

$$p_2(x) = p_1(x) + C\,\omega_2(x) = x - \frac{1}{2} + C(x^2 - x)$$

$$p_2(-1) = -1 - \frac{1}{2} + C(1+1) = \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{3}{2} + 2C = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow C = 1$$

$$p_2(x) = \cancel{x} - \frac{1}{2} + x^2 \cancel{-x}$$
$$\vdots$$
$$= x^2 - \frac{1}{2}$$

Esempio interpolazione incrementale

x	y
0	$-1/2$
1	$1/2$
-1	$1/2$

$$\omega_0(x) = 1$$

$$\omega_1(x) = x - x_0 = x$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = \omega_1(x)(x - x_1) = x(x-1) = x^2 - x$$

$$\Rightarrow \quad p_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

Aggiungiamo punto $(3,2)$ $\quad x_3 = 3 \quad y_3 = 2$

$$\omega_3(x) = \omega_2(x)(x - x_2) = (x^2 - x)(x - (-1)) = (x^2 - x)(x+1) = x^3 - x$$

$$p_3(x) = p_2(x) + c\,\omega_3(x) = x^2 - \frac{1}{2} + c(x^3 - x)$$

$$p_3(3) = 9 - \frac{1}{2} + c(27 - 3) = 2$$

$$\Rightarrow c = \frac{\frac{1}{2} - 7}{24} = -\frac{13}{48}$$

$$p_3(x) = x^2 - \frac{1}{2} - \frac{13}{48}(x^3 - x)$$

METODO DI INTERPOLAZIONE DI NEWTON (INIZIO)

$$B = \{\omega_0\ \omega_1\ \omega_2 \cdots \omega_n\}$$

$$\omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

$$\omega_0(x) = 1$$

$$\omega_1(x) = x - x_0$$

$$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$\vdots$$

$$\omega_{k+1}(x) = \omega_k(x)(x - x_k)$$

Matrice del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} \omega_0(x_0) & \omega_1(x_0) & & \omega_n(x_0) \\ \omega_0(x_1) & \omega_1(x_1) & & \omega_n(x_1) \\ & & & \\ \omega_0(x_n) & \omega_1(x_n) & & \omega_n(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & \omega_n(x_n) \end{bmatrix}$$

ALTRO MODO DI SCRIVERE INTERPOLAZIONE DI NEWTON

$$P(x) = a_0\,\omega_0(x) + a_1\,\omega_1(x) + \dots + a_n\,\omega_n(x)$$

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

a_0 dipende da (x_0, y_0)

a_1 dipende da (x_0, y_0) (x_1, y_1)

$\vdots$

a_n dipende da $(x_0, y_0) \cdots (x_n, y_n)$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ sono detti differenze divise e si calcolano molto velocemente