Zeri di funzione

$f(x)$ funzione in 1 variabile

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "abbastanza regolare"

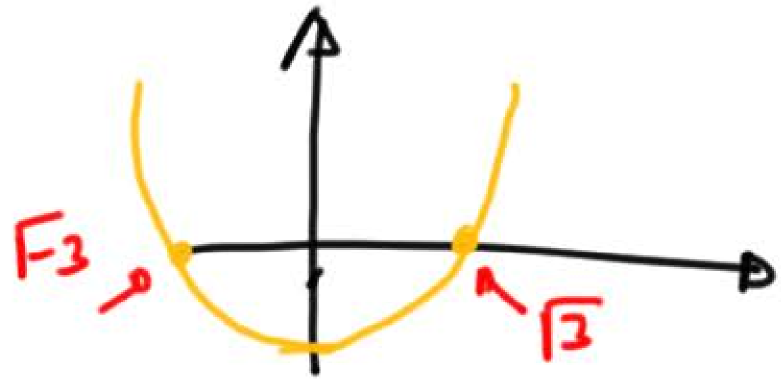
PROBLEMA so che $f(\alpha) = 0$ α = radice di $f(x)$

trovare α (anche in maniera approssimata)

ESEMPIO

CALCOLARE RADICE QUADRATA DI 3 cioè $\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ TROVARE LO ZERO di $f(x) = x^2 - 3$

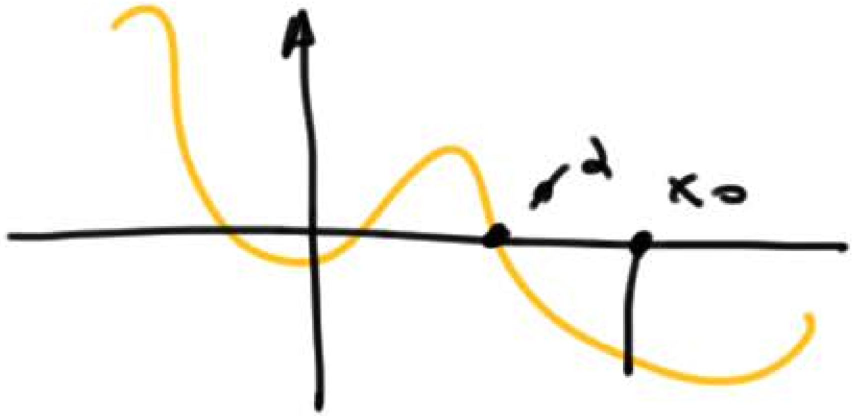


IDEA DI NEWTON (Per i polinomi)

Sia $p(x)$ polinomio e x_0 una approssimazione di α radice di $p(x)$ cioè $p(\alpha)=0$.

Vogliamo MIGLIORARE la approssimazione x_0

ATTENZIONE: NON CONOSCO IL VALORE DI α



cerco h tale che $x_0+h=\alpha$

$p(\alpha)=0$ quindi $p(x_0+h)=0$

se h è calcolato PERFETTAMENTE

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \qquad + a_n x^n$$

$$p(x+h) = a_0 + a_1 (x+h) + a_2 (x+h)^2 + \qquad + a_n (x+h)^n$$

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 \qquad = x^2 + 2xh + h^2$$

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 = x^3 + 3x^2 h + h^2(3x+h)$$

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3 h + h^2(\dots)$$

$$(x+h)^m = x^m + m x^{m-1} h + h^2(\dots)$$

$$p(x+h) = \overbrace{\boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \qquad + a_n x^n}}^{p(x)}$$

$$+ a_1 h + a_2 2xh + a_3 3x^2 h + \qquad + a_n n x^{n-1} h$$

$$+ h^2(\dots \quad .)$$

$$= p(x) + \underbrace{h(a_1 + a_2 2x + a_3 3x^2 + \qquad + a_n n x^{n-1})}_{h\,p'(x)} + h^2(\dots)$$

$$p(x+h) = p(x) + h\,p'(x) + h^2(\cdots) = 0$$

Risolvere problema in h con questo termine è equivalente a risolvere il problema originale.

IDEA DI NEWTON: se h è piccolo
h^2 è + piccolo
quindi lo trascuro

Risolvo il problema approssimato

$$0 = p(x_0) + h\,p'(x_0) \Rightarrow h = -\frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$$

se chiamo

$$x_1 = x_0 + h = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$$

IDEONA  $\Rightarrow$ 

se x_1 è meglio di x_0 ripeto il ragionamento

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}}$$

Esempio calcolo $\sqrt[3]{2}$

$p(x) = x^3 - 2 \qquad p'(x) = 3x^2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 2}{3x_k^2} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) x_k + \frac{2}{3x_k^2}$$

$$= \frac{2}{3}\left(x_k + \frac{1}{x_k^2}\right)$$

$x_0 = 2$

k	x
0	2
1	1,5
2	1,2962
3	1,2609
4	1,2599

GENERALIZZAZIONE USANDO SERIE DI TAYLOR

$f(\alpha)=0 \qquad x_0 \approx \alpha \qquad$ cerchiamo h tale che $x_0+h=\alpha$

$$f(\alpha)=0$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\, f'(x_0) + \underbrace{\frac{h^2}{2} f''(x_0+\eta)}_{\text{RESTO DA TRASCURARE}} \qquad |\eta| \le |h|$$

Risolvo

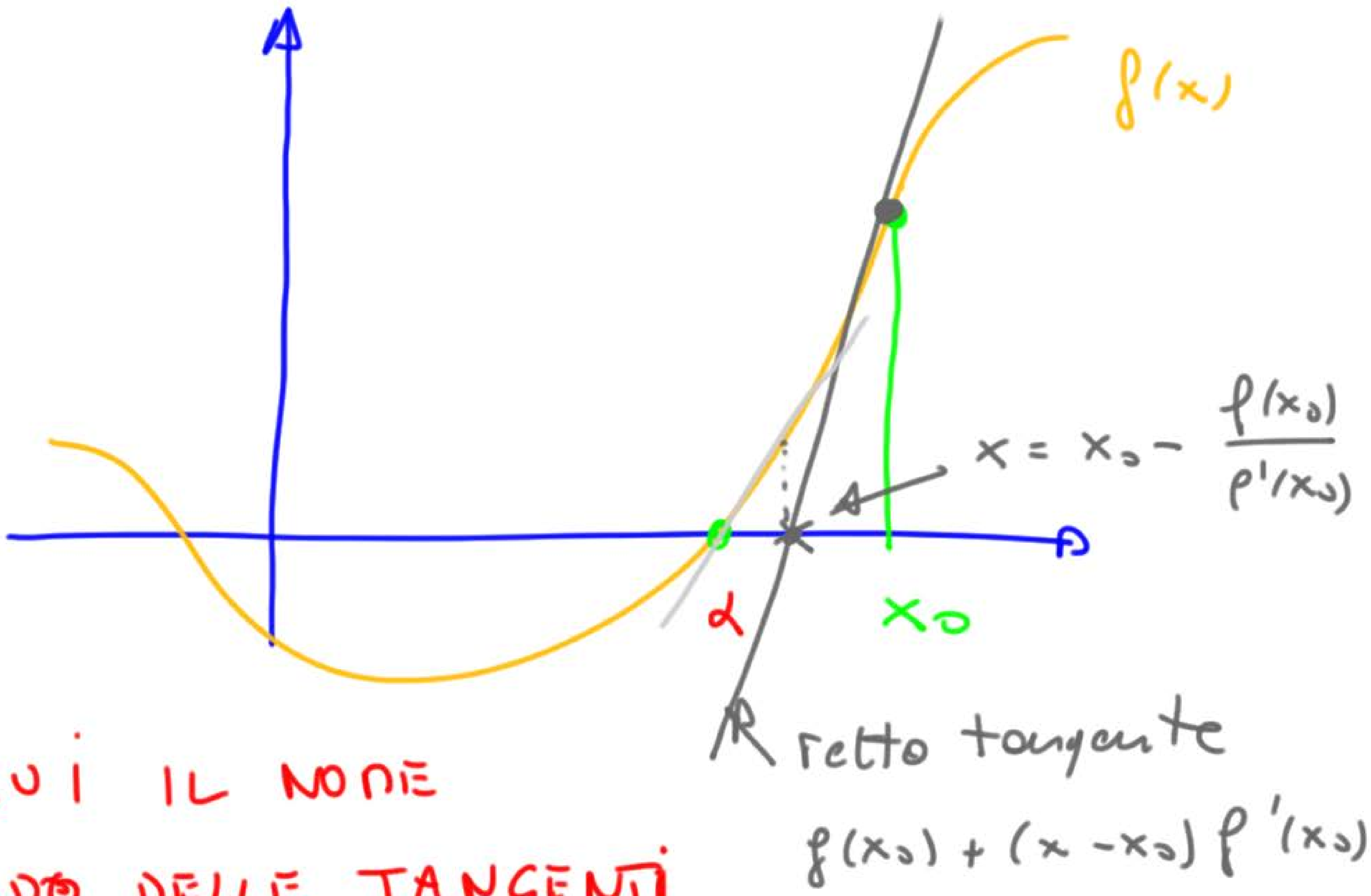
$$0 = f(x_0) + h\, f'(x_0) \Rightarrow h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 + h = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

METODO DI NEWTON

$$\Rightarrow \boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

INTERPRETAZIONE GEOMETRIA



DA CUI IL NOME

METODO DELLE TANGENTI

IL DIFFICILE E': CALCOLARE VELOCITÀ DI CONVERGENZA, E CONDIZIONE DI CONVERGENZA