ZERI DI FUNZIONE

problema: risolvere $f(x)=0$

cioè trovare α tale che $f(\alpha)=0$

Metodo di Newton

Derivazione geometrica (metodo delle tangenti)

+ semplice derivazione usando serie di TAYLOR

x_0 = prima approssimazione

$\alpha = x_0 + h$

$\xi_0 \in I(x_0, x_0+h)$

$$0 = f(\alpha) = f(x_0+h) \overset{\text{TAYLOR}}{=} f(x_0) + f'(x_0)\,h + \underbrace{f''(\xi_0)\frac{h^2}{2}}_{\text{Termine da Trascurare}}$$

$$h \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

E se $f'(x)$ non è disponibile?

Soluzione 1

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_k - \delta)}{\delta}$$

(uso differenze finite per approssimare derivata prima)

$$f(x_k - \delta) = f(x_k) + f'(x_k)(-\delta) + f''(\xi_k)\frac{\delta^2}{2}$$

$$\Rightarrow f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_k - \delta)}{\delta} + \boxed{f''(\xi_k)\frac{\delta}{2}} \leftarrow \text{Termine errore}$$

Newton approssimato con differenze finite

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)\,\delta_k}{f(x_k) - f(x_k - \delta_k)}$$

È meglio che

$\delta_k \to 0$

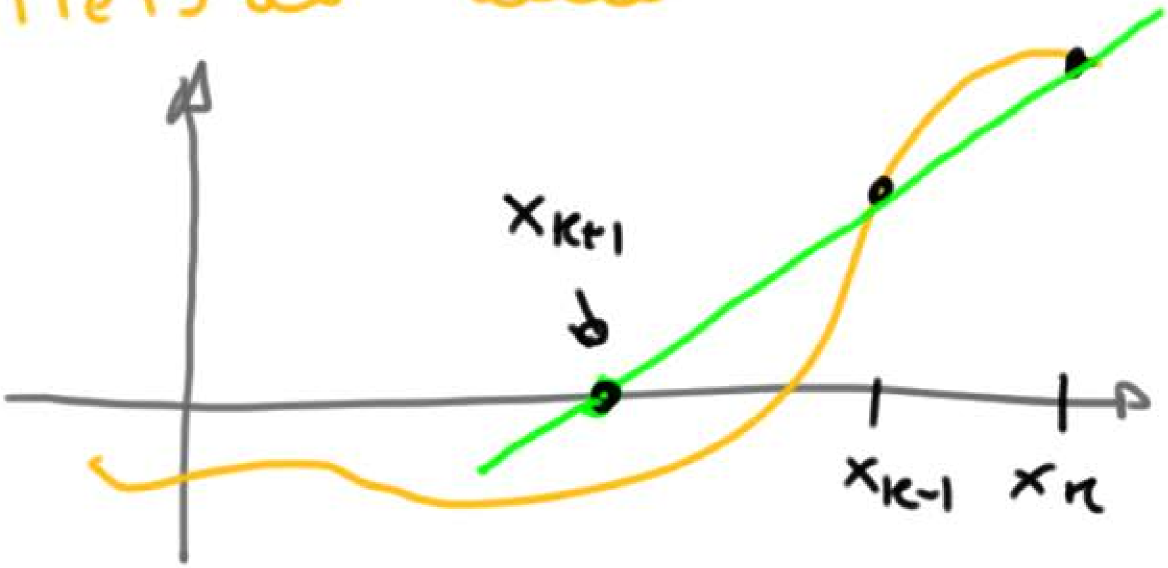
$k \to \infty$

SCELTA DI δ_n AUTOMATICA

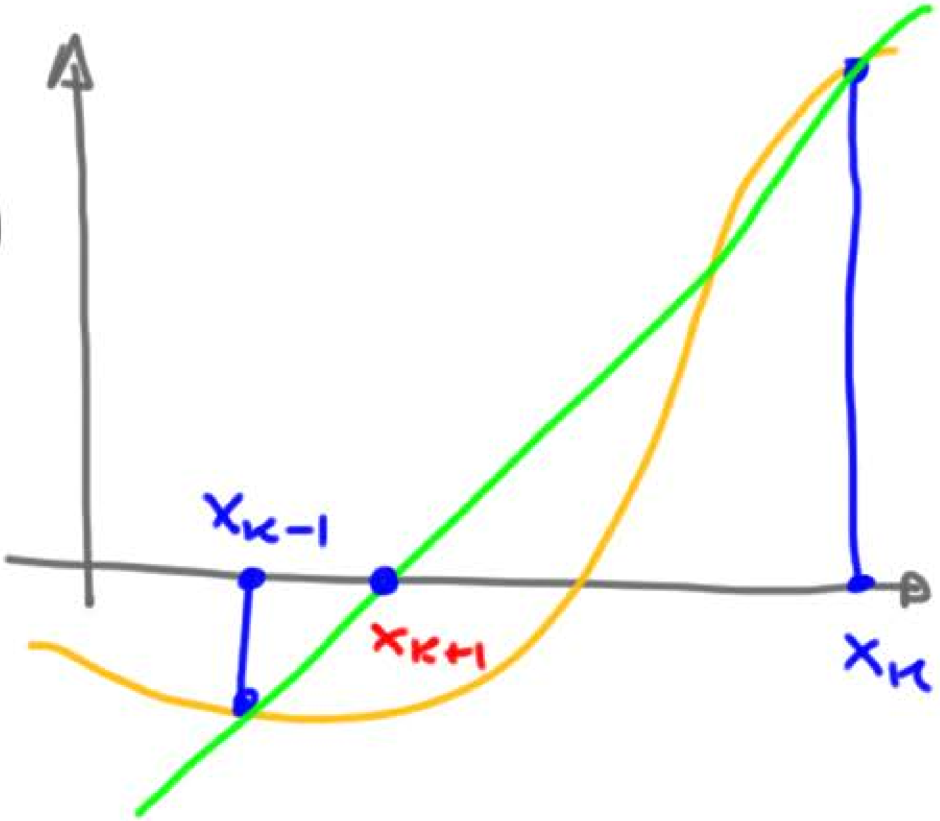
SOLUZIONE 2

$$\delta_k = x_k - x_{k-1} \Rightarrow f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}_{\text{Metodo delle SECANTI}}$$



DERIVAZIONE GEOMETRICA



Retta interpolante $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$
e $(x_k, f(x_k))$

$$p(x) = f[x_k] + f[x_k\, x_{k-1}](x - x_k)$$

risolvendo $p(x) = 0$

$$x = x_k - \frac{f[x_k]}{f[x_k\, x_{k-1}]} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

IN GENERALE

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{D_k}$$

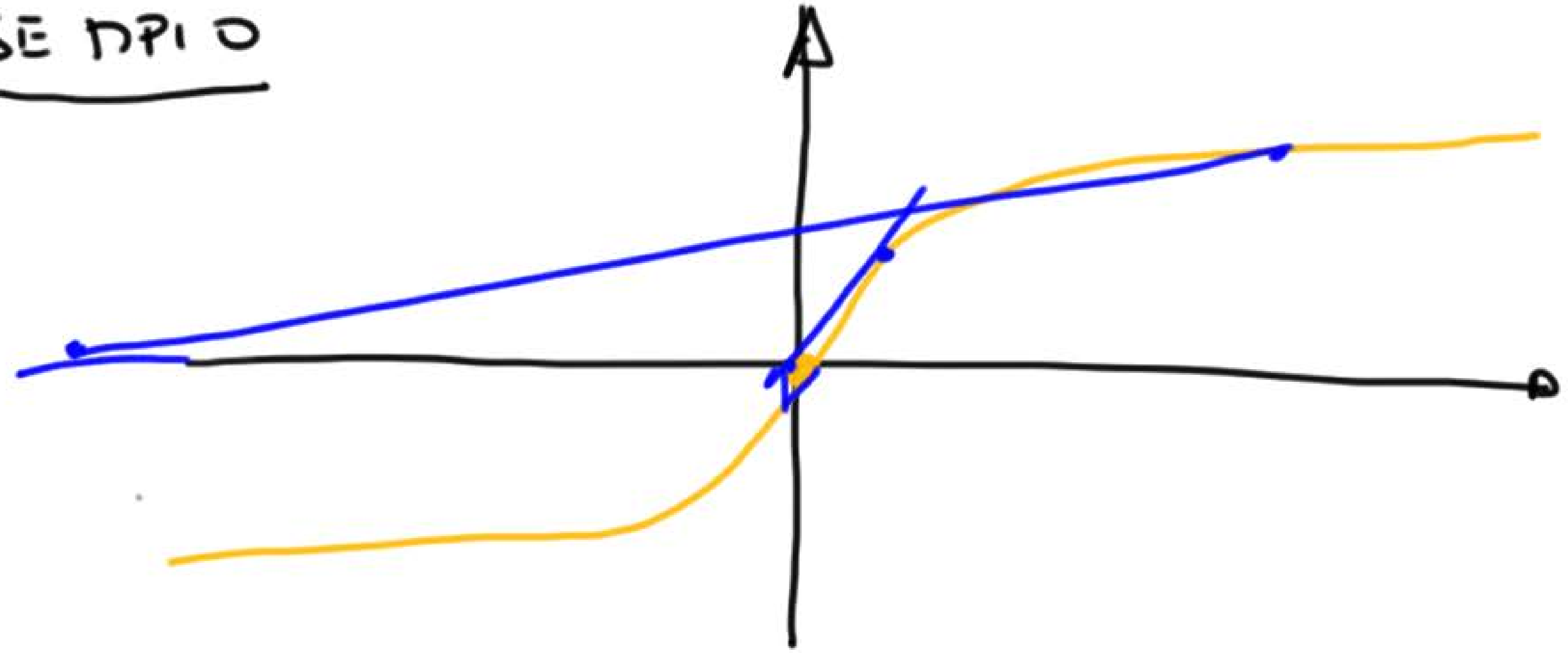
$D_k = f'(x_k)$ NEWTON

$D_k = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ SECANTI

$D_k = \dots\dots$ ALTRI METODI

QUANDO FUNZIONANO? SEMPRE?

ESEMPIO



$$x_{k+1} = x_k - \arctan(x_k)(1 + x_k^2)$$

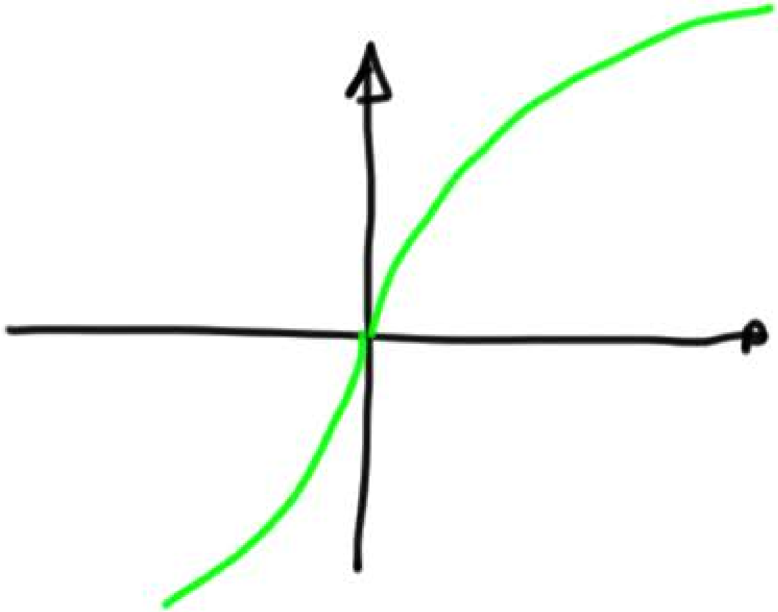
x	$f(x)$
1	0,78
-0,5708	-0.52
0,1168	0,11
-0,001	-0,001
≈ 0	≈ 0

x	$f(x)$
10	1,47
-138,58	-1,56
$-1,4\ 10^9$	1,57

In generale il metodo non converge se non sono abbastanza "vicino" allo 0 cercato

ESEMPIO DI "MAI CONVERGENZA"

$$f(x) = \sqrt{|x|}\,\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

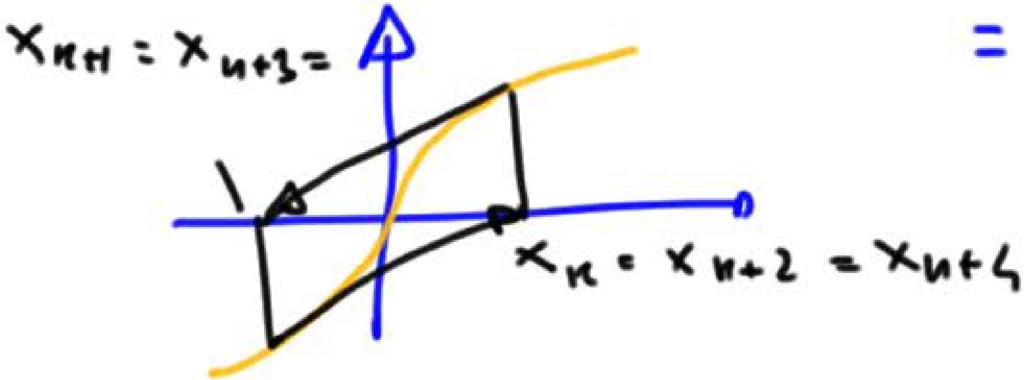


$$f'(x) = \begin{cases} 1/2\sqrt{x} & x > 0 \\ 1/2\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mathrm{sign}(x_n)\sqrt{|x_n|}}{\frac{1}{2\sqrt{|x_n|}}} = x_n - 2\,\mathrm{sig}(x_n)\sqrt{|x_n|}\sqrt{|x_n|}$$

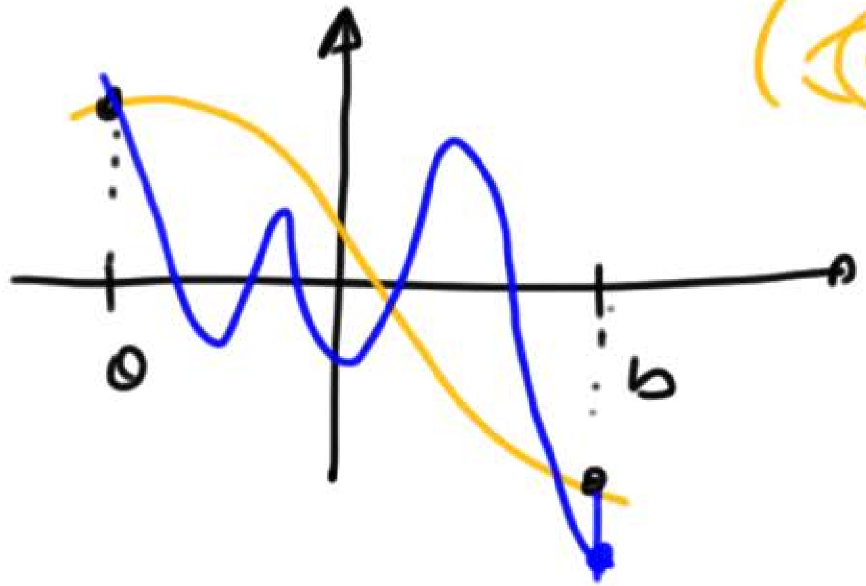
$$= x_n - 2\,\mathrm{sm}(x_n)|x_n|$$

$$= x_n - 2x_n = -x_n$$



METODO BISEZIONE O DICOTOMICO

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$ e $f(a)f(b)<0$
allora $\exists\ c \in (a,b)$ tale che $f(c)=0$



($\exists$ significa almeno 1 non ESATTAMENTE 1)

Se $f(a)f(b)<0$ $\quad c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

① $f(c)=0$ (quasi impossibile)

② $f(a)f(c)<0$ $[a,c]$ contiene sicuramente 0

③ $f(b)f(c)<0$ $[c,b]$ contiene sicuramente 0

ALGORITMO

$[a_0, b_0]$ intervallo con $f(a_0)\,f(b_0) < 0$, $\varepsilon > 0$ Tollerante

```
K ← 0
WHILE b_K − a_K > ε DO
   c ← (a_K + b_K)/2
   IF f(a_K) * f(c) < 0 THEN
      a_K+1 ← a_K
      b_K+1 ← c
   ELSE IF f(b_K) * f(c) < 0 THEN
      a_K+1 ← c
      b_K+1 ← b_K
   ELSE
      f(c) = 0 e c è uno zero di f(x)
   END
   K ← K+1
END
```

$[a_K, b_K]$ è intervallo con $b_K - a_K < \varepsilon$ con 0 all'intorno

ALGORITMO (mod 2)

$[a,b]$ intervallo con $f(a)f(b) < 0$, $\varepsilon > 0$ tolleranza

```
WHILE b-a > ε DO
   c ← (a+b)/2
   IF f(a) * f(c) < 0 THEN
      b ← c
   ELSE IF f(b) * f(c) < 0 THEN
      a ← c
   ELSE
      f(c)=0 e c è uno zero di f(x)
   END
END
```

METODO DI BRENT

COMBINA

DICOTOMICO (converge sempre ma lento)

SECANTI (veloce ma vicino alla radice $x_{n+1} \simeq x_n$

$$D_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$ MAL CONDIZIONATO $\simeq \frac{0}{0}$)

DIFFERENZE FINITE (se $x_n \simeq x_{n-1}$

$$D_n = \frac{f(x_n) - f(x_n - \delta)}{\delta}$$)

USA PARABOLA INTERPOLANTE (per andare + veloce se può)

Velocità di convergenza

Newton $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \phi(x_k)$$

Secanti $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{D_k} \qquad x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1})$$

$$D_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

in generale un metodo iterativo può essere scritto come

$$x_{k+1} = \phi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-e})$$

La forma di ϕ è determinata dal metodo numerico

COSA MI ASPETTO ?

Newton $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\phi(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$$

$\phi(\alpha) = \alpha \Rightarrow \alpha$ è un punto fisso

$\alpha = \phi(\alpha, \alpha, \dots \alpha)$ se il metodo è "buono"

Nel caso delle secanti

$$\phi(\alpha, \alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{D(\alpha)}$$

Problema o meno che lo ritrovo come $f'(\alpha)$

$$\boxed{D(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(\alpha)}{\alpha - \alpha}}$$

COSA MI ASPETTO IN GENERALE ?

parto da x_0

e costruisco $x_n = \phi(x_n x_{n-1} \dots x_{n-e})$

iterativamente con un qualche metodo

metodo numerico (Newton, Secanti, etc...)

Se converge cioè $\displaystyle \lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$

serve una misura della velocità di convergenza, cioè se $\varepsilon_n = x_n - \alpha$ è

l'errore alla n-esima iterata devo sapere

come $\displaystyle \lim_{n \to \infty} |\varepsilon_n| = 0$

Q-convergenze

Se $|x_{n+1}-\alpha| \le C|x_n-\alpha|$ $\quad 0<C<1$

diremo che $x_n \to \alpha$ linearmente

[q-convergenza lineare]

Se $|x_{n+1}-\alpha| \le C|x_n-\alpha|^p$ $\quad C>0$, $p>1$

[q-convergenza ordine p]

Non serve $C<1$ per p-convergenza. (Esempio $p=2$)

$$\underbrace{C|x_{n+1}-\alpha|}_{E_{n+1}} \le C^2|x_n-\alpha|^2$$

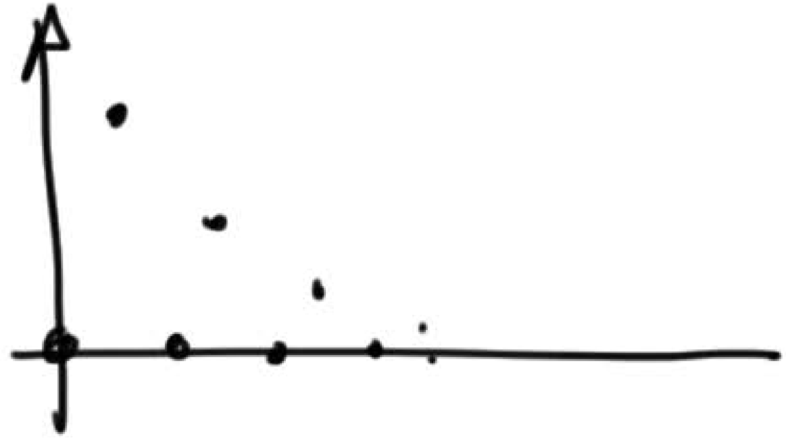
$$E_{n+1} \le E_n^2$$

basta che $E_0 < 1$ per avere convergenza

La Q-convergenza non è sufficiente

Esempio

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ 2^{-k} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$



La successione va chiaramente a 0 ma non ha q-convergente

$$0 < |x_{k+1} - 0| \le C\,|x_k - 0|^p = 0$$

se k pari   se k pari

Soluzione r-convergente

$x_k \to \alpha$ è r-linearmente convergente se

$|x_k - \alpha| \leq y_k$ e y_k è q-linearmente convergente

$x_k \to \alpha$ è r-convergente di ordine p

se esiste y_k con $|x_k - \alpha| \leq y_k$

e y_k è q-convergente di ordine p

FACILE

Esempio Newton è q-convergente $p = 2$

Secanti r-convergente $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618$

DIFFICILE