METODI NUMERICI PER ODE

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & x \in (a,b) \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

Abbiamo visto metodo di Eulero

- $[a,b]$ è diviso in n parti di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$
- $x_k = a + kh \Rightarrow$ nodi = coordinate dove è approssimata la soluzione
- $y_k \approx y(x_k)$ $\quad y_k$ = approssimazione di $y(x)$ in x_k

$$\begin{cases} y_0 = y_a & \text{(dato iniziale)} \\ y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k) \end{cases}$$

metodo costruito sulla approssimazione a differenze finite di $y'(x)$

calcolo la stima dell'errore

sotto ipotesi regolarità della soluzione e $f(x,y)$

$$|y_k - y(x_k)| \leq C h$$

C non dipende da h e k

COSTRUZIONE DI METODI NUMERICI DI ORDINE ELEVATO

Metodo di Eulero produce y_k tale che

$$|y_k - y(x_k)| \leq C h \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

se C è grande e voglio errore piccolo $\Rightarrow$ h molto piccolo $\Rightarrow$ n molto grande

Se trovo un metodo numerico tale che

$$|y_k - y(x_k)| \leq C h^p \quad \text{con } p > 1$$

questo metodo richiederà (asintoticamente) meno "conti da fare". In particolare se ad esempio $p = 4$ e voglio ridurre l'errore di 10 volte allora

$$C(h_{new})^p = \frac{1}{10} C h^p \Rightarrow 10^{\frac{1}{p}} h_{new} = h$$

$$\Rightarrow h_{new} = h / 10^{\frac{1}{4}} \approx 0,56 h$$

COSTRUZIONE DI METODI NUMERICI DI ORDINE ELEVATO

- UN METODO DI ORDINE ELEVATO PERMETTE DI CALCOLARE UNA APPROSSIMAZIONE DELLA SOLUZIONE CON MENO PUNTI E QUINDI CON MENO COSTI COMPUTAZIONALI

COSTRUZIONE $[a,b]$ $h = \frac{b-a}{n}$ $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_a \end{cases}$

$y(x)$ soluzione esatta del problema

TAYLOR

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) \overset{T}{=} y(x_k) + y'(x_k)\,h + O(h^2)$$

$$y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\,f(x_k, y(x_k)) + O(h^2)$$

IDEA $\Rightarrow$ TRASCURO TERMINE $O(h^2)$

$$y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k, y_k) \quad \text{[Met. Eulero]}$$

STESSA COSTRUZIONE MA UN TERMINE IN PIÙ NELLA SERIE DI TAYLOR

$$y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + \underbrace{y'(x_k)}_{f(x_k,\, y(x_k))} h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$y''(x_k) = \frac{d}{dt} y'(x)\Big|_{x = x_k}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dt} y'(x) = \frac{d}{dt} f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x)$$

$$\vdots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))\, f(x, y(x))$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + f(x_k, y(x_k))\, h + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right] + O(h^3)$$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + f(x_k, y(x_k))\, h + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right] + O(h^3)$$

TRASCURANDOLO

$$\underbrace{y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)\, f(x_n y_n)\right]}$$

METODO BASATO SULLO SVILUPPO DI TAYLOR DI ORDINE 2

METODO BASATO SULLA SERIE DI TAYLOR DI ORDINE 3

$y(x)$ soluzione esatta $\quad h = \frac{b-a}{n}$

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\,y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + O(h^4)$$

Termine che verrà troncato

$$y^{(n)}(x) = D_n(x, y(x))$$

$$y'(x) = D_1(x, y(x)) = f(x, y(x))$$

$$D_1(x,y) = f(x, y(x))$$

$$y''(x) = D_2(x, y(x)) = \frac{d}{dx} f(x, y(x))$$

$$= \frac{d}{dx} D_1(x, y(x)) = \frac{\partial D_1}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial D_1}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x)$$

$$= \frac{\partial D_1}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial D_1}{\partial x}(x, y(x))\, f(x, y(x))$$

$$D_2(x,y) = \frac{\partial D_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial D_1}{\partial y}(x,y)\, f(x,y)$$

$$y^{(n)}(x) = D_n(x, y(x)) \qquad D_1(x,y) = f(x, y(x))$$

$$y''(x) = \frac{\partial D_1}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial D_1}{\partial x}(x, y(x))\, f(x, y(x))$$

$$D_2(x,y) = \frac{\partial D_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial D_1}{\partial y}(x,y)\, f(x,y)$$

$$y'''(x) = \frac{d}{dx} D_2(x, y(x)) = \frac{\partial D_2}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial D_2}{\partial y}(x, y(x))\, y'(x)$$

$$= \frac{\partial D_2}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial D_2}{\partial y}(x, y(x))\, f(x, y(x))$$

RISULTA LA <u>OVVIA</u> ricorrenza

$$D_1(x,y) = f(x,y)$$

$$D_{n+1}(x,y) = \frac{\partial D_n}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial D_n}{\partial y}(x,y)\, f(x,y)$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = xy + x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

TAYLOR ORDINE 4

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h\, y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x_k) + O(h^5)$$

Metodo numerico

$$y_{k+1} = y_k + h\, D_1(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} D_2(x_k, y_k) + \frac{h^3}{6} D_3(x_k, y_k) + \frac{h^4}{24} D_4(x_k, y_k)$$

$$D_1(x,y) = f(x,y) = xy + x^2$$

$$D_1(x,y) = f(x,y) = xy + x^2$$

$$D_2(x,y) = \frac{\partial D_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial D_1}{\partial y}(x,y)\, f(x,y)$$

$$= y + 2x + x\,(xy + x^2) = y + 2x + yx^2 + x^3$$

$$= y\,(1 + x^2) + x\,(2 + x^2)$$

$$D_3(x,y) = \frac{\partial D_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial D_2}{\partial y}(x,y)\, f(x,y)$$

$$= 2xy + 2 + 3x^2 + (1 + x^2)(xy + x^2)$$

$$= 2xy + 2 + 3x^2 + xy + x^2 + x^3 y + x^4$$

$$= y\,(3x + x^3) + 2 + 3x^2 + x^4$$

$D_4(x,y) =$ (DA FINIRE)

CONSIDERAZIONI

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Usando il metodo basato sulla serie di TAYLOR:

(A) Bisogna calcolare $D_k(x,y)$

$$D_1(x,y) = f(x,y)$$

$$D_{k+1}(x,y) = \frac{\partial D_k}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial D_k}{\partial y}(x,y)\, f(x,y)$$

$\Rightarrow$ SERVE UNA MANIPOLAZIONE SIMBOLICA PER OGNI $f(x,y)$

(B) $D_1(x,y) = f(x,y)$ $\quad D_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$ $\quad D_3(x,y) =$ + complesso

IN GENERALE $D_k(x,y)$ è ESPRESSIONE COMPLICATA DELLE DERIVATE PARZIALI DI $f(x,y)$

IDEA DI RUNGE-KUTTA

Metodo basato su Taylor ordine 2

$$y_{k+1} = y_k + h\, D_1(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} D_2(x_k, y_k)$$

$$= y_k + h\, f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)}\, f(x_k, y_k)\Big)$$

TERMINI CHE NECESSITANO DI MANIPOLAZIONE SIMBOLICA

$$g(t) = f(x + At, y + Bt)$$

$$f(x + A, y + B) = g(1) \qquad f(x, y) = g(0)$$

$$g(1) = g(0) + 1\, g'(0) + \frac{1^2}{2} g''(0) + \dots + \frac{1^n}{n!} g^{(n)}(0) + \underline{\underline{\text{Resto}}}$$

$$g(t) = f(x + At,\ y + Bt)$$

$$f(x+A,\ y+B) = g(1) \qquad f(x,y) = g(0)$$

$$g(1) = g(0) + 1\, g'(0) + \frac{1^2}{2} g''(0) + \quad + \frac{1^n}{n!} g^{(n)}(0) + \underline{\underline{\text{Rest}}}$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt} f(x + At,\ y + Bt)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\ldots) \frac{\partial x + At}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(\ldots) \frac{\partial y + Bt}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\ldots)\, A + \frac{\partial f}{\partial y}(\ldots)\, B$$

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, A + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, B$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+At, y+Bt)\, A + \frac{\partial f}{\partial y}(x+At, y+Bt)\, B$$

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\ldots)\, A^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\ldots)\, AB$$

Schwarz

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\ldots)\, AB + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\ldots)\, B^2$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+At, y+Bt)\, A^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+At, y+Bt)\, B^2$$

$$+ 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+At, y+Bt)\, AB$$

$$f(x+A, y+B) = g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{6} g'''(\xi)$$

$$= f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x} A + \frac{\partial f}{\partial y} B + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} B^2\right)$$

$$+ AB\, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{6} g'''(\xi)$$

IDEA DI RK

se calcolo $f(x + h\alpha, y + h\beta)$

mi "compaiono" le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

quindi combinando $f(x + h\alpha_j, y + h\beta_j)$

con α_j, β_j opportuni posso approssimare

$\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e derivate successive nel

metodo basato su Taylor.

Come ??... TO BE CONTINUED