STABILITÀ PER METODI MULTISTEP

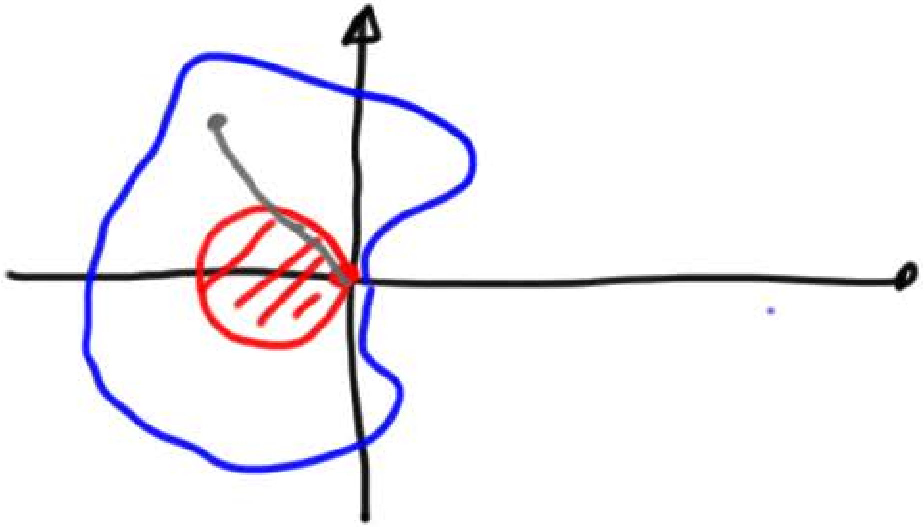
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_a \end{cases}$$

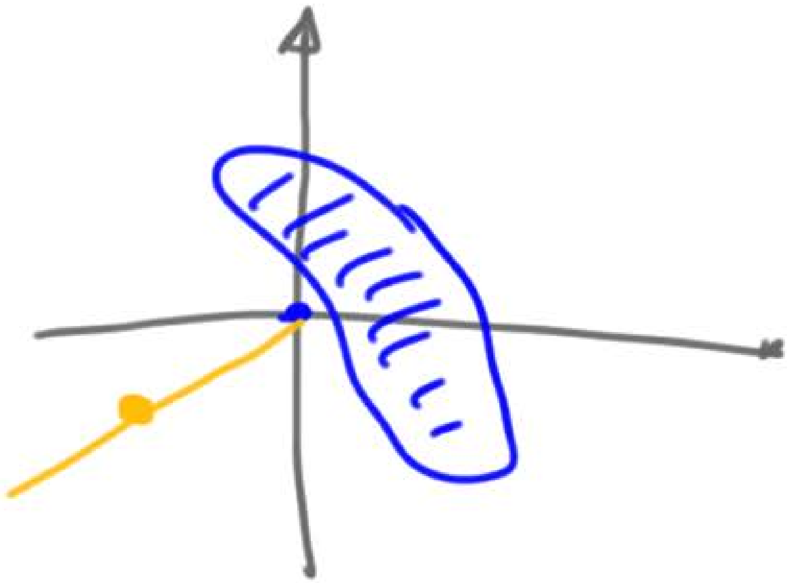
$[a,b]$ n parti $h = \frac{b-a}{n}$ $\quad x_k = a + kh$

Metodo multistep

$$\sum_{j=-1}^{l} \alpha_j y_{k-j} = h \sum_{j=-1}^{l} \beta_j f_{k-j} \qquad f_k = f(x_k, y_k)$$

Regione di stabilità del metodo





SI STUDIA LA STABILITÀ PER ODE PARTICOLARE

$$\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione esatta $y(x) = e^{\alpha x}$

valido per α complesso

Metodo multistep per ODE

$$\sum_{j=-1}^{\ell} \alpha_j y_{k-j} = h \sum_{j=-1}^{\ell} \beta_j (\alpha y_{k-j})$$

$$\Rightarrow \sum_{j=-1}^{\ell} (\alpha_j - \underbrace{(\alpha h)}_{s} \beta_j) y_{k-j} = 0$$

$$\sum_{j=-1}^{\ell} (\alpha_j - s\beta_j) y_{k-j} = 0$$ ← Ricorrenza

come si calcola y_k per k generico?

RICORRENZE LINEARI

$$\begin{cases} a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + a_2 y_{k+2} + \cdots + a_n y_{k+n} = 0 \\ \left.\begin{array}{l} y_0 = \\ y_1 = \\ \vdots \\ y_{n-1} = \end{array}\right\} \text{assegnati (valori iniziali)} \end{cases}$$

$a_0, a_1, \dots a_n$ coefficienti costanti

Cerchiamo soluzioni del tipo $y_k = f(k)$

PER LE RICORRENZE LINEARI CI SONO ANALOGIE CON LE ODE LINEARI

CERCHIAMO SOLUZIONI DEL TIPO

$$y_k = z^k$$

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + a_2 y_{k+2} + \cdots + a_n y_{k+n} = 0$$

$$y_k = z^k$$

$$a_0 z^k + a_1 z^{k+1} + a_2 z^{k+2} + \quad + a_n z^{k+n} = 0$$

$$z^k \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \quad + a_n z^n\right) = 0$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$0 \qquad\qquad\qquad 0$$

$\rightarrow z=0$ $\qquad p(z)=0 \qquad p(x) = a_0 + a_1 x + \quad + a_n x^n$

Nel caso di radici distinte ci sono n soluzioni $\quad p(z_j)=0 \quad j=1,2,\dots,n$

z_j radici del polinomio $p(x)$ detto polinomio caratteristico

$$a_0 z_j^k + a_1 z_j^{k+1} + a_2 z_j^{k+2} + \cdots + a_n z_j^{k+n} =$$

$$z_j^k \left(a_0 + a_1 z_j + a_2 z_j^2 + \cdots + a_n z_j^n\right) = 0$$

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + a_2 y_{k+2} + \cdots + a_n y_{k+n} = 0$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \quad + a_n x^n$$

LA COMBINAZIONE LINEARE DELLE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO SODDISFA LA RICORRENZA

$$w_k = d_1 z_1^k + d_2 z_2^k + \quad + d_n z_n^k$$

$$a_0 w_k + a_1 w_{k+1} + \quad + a_n w_{k+n}$$

$$= a_0 (d_1 z_1^k + d_2 z_2^k + \cdots + d_n z_n^k) +$$
$$a_1 (d_1 z_1^{k+1} + d_2 z_2^{k+1} + \quad + d_n z_n^{k+1}) +$$
$$\cdots$$
$$a_n (d_1 z_1^{k+n} + d_2 z_2^{k+n} + \quad + d_n z_n^{k+n})$$

$$= d_1 z_1^k (a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \quad + a_n z_1^n) +$$
$$d_2 z_2^k (a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2 + \quad + a_n z_2^n) + \cdots +$$
$$d_n z_n^k (a_0 + a_1 z_n + a_2 z_n^2 + \quad + a_n z_n^n)$$

$$d_1 z_1^k p(z_1) +$$
$$d_2 z_2^k p(z_2) +$$
$$\vdots$$
$$d_n z_n^k p(z_n) = 0$$

$$= 0$$

QUINDI:

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2} + \dots + a_m y_{n+m} = 0 \qquad (*)$$

Nel caso $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad + a_m x^m$
abbia radici distinte i possibili y_n che soddisfano la ricorrenza $(*)$ si scrivono come

$$y_n = \alpha_1 z_1^n + \alpha_2 z_2^n + \quad + \alpha_m z_m^n$$

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m$ si determinano dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_m \\ y_1 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \quad + \alpha_m z_m \\ \vdots \\ y_{m-1} = \alpha_1 z_1^{m-1} + \alpha_2 z_2^{m-1} + \dots + \alpha_m z_m^{m-1} \end{cases}$$

sistema lineare

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_n \\ y_1 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \quad + \alpha_n z_n \\ \vdots \\ y_{n-1} = \alpha_1 z_1^{n-1} + \alpha_2 z_2^{n-1} + \cdots + \alpha_n z_n^{n-1} \end{cases}$$

sistema lineare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ z_1 & z_2 & & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & & z_n^2 \\ & & & \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & & z_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{Vandermonde}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Vandermonde $\Rightarrow$ non singolare se $z_i \neq z_j$ per $i \neq j$

CASO DI UNA RICORRENZA CON RADICI MULTIPLE

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + a_2 y_{k+2} + \quad + a_n y_{k+n} = 0$$

$p(x) = a_0 + a_1 x + \quad + a_n x^n$ ha una radice doppia z

$\Rightarrow$ Cerco soluzione del tipo $y_k = z^k$ e $y_k = k z^k$

$$a_0 k z^k + a_1 (k+1) z^{k+1} + a_2 (k+2) z^{k+2} + \quad + a_n (k+n) z^{k+n}$$

$$= k z^k (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \quad + a_n z^n)$$

$$+ z^{k+1} (a_1 + 2 a_2 z + 3 a_3 z^2 + \quad + n a_n z^{n-1})$$

$$= k z^k \underbrace{p(z)}_{=0} + z^{k+1} \underbrace{p'(z)}_{=0} = 0$$

perché radice doppia

SOLUZIONE GENERALE DI UNA RICORRENZA LINEARE (OMOGENEA)

$$a_0 y_k + a_1 y_{k+1} + a_2 y_{k+2} + \qquad + a_n y_{k+n} = 0$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_{ij} k^{i-1} z_j^k$$

p = numero radici distinte di $p(x) = a_0 + a_1 x + \quad + a_n x^n$

m_j = molteplicità radice j-esima

Esempio se z_j ha molteplicità 3 la soluzione contiene

$$\{ z_j^k, k z_j^k, k^2 z_j^k \}$$

REGIONE DI STABILITÀ DI UN METODO MULTISTEP LINEARE

$$\sum_{j=-1}^{e} \alpha_j y_{k-j} = h \sum_{j=-1}^{e} \beta_j f_{k-j} \qquad f_k = f(x_k, y_k)$$

R.S. $$\sum_{j=-1}^{e} (\alpha_j - (h\lambda)\beta_j)\, y_{k-j} = 0$$

punti dove la ricorrenza è stabile cioè $|y_k|$ è limitato $\forall k$

$$y_k = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m_j} d_{ij}\, k^{i-1} z_j^k$$

$|z_j| \leq 1$

$|z_j| < 1$ se z_j è radice multipla

$$|y_k| \leq \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m_j} |d_{ij}|\, k^{i-1} |z_j|^k \leq \infty \ ?$$

ESEMPIO CALCOLO REGIONE STABILITÀ

ADAMS MOULTON $\quad p = 1$

$\alpha = (1 \quad -1 \quad 0)$

$\beta = \left(\frac{5}{12} \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{12}\right)$

CONTROLLO ORDINE METODO

① $\sum_{j=-1}^{1} \alpha_j = 1 + (-1) + 0 = 0 \quad (\text{OK})$

② $\sum_{j=-1}^{1} (j\alpha_j + \beta_j) = (-1) + 0 + 0 + \frac{5}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12}$

$= -1 + \frac{5+8-1}{12} = 0 \quad (\text{OK})$

③ $\sum_{j=-1}^{1} (j^2\alpha_j + 2j\beta_j) = 1 + 0 + 0 - \frac{5}{6} + 0 - \frac{1}{6} = 0 \quad (\text{OK})$

④ $\sum_{j=-1}^{1} (j^3\alpha_j + 3j^2\beta_j) \neq 0 \quad$ metodo ordine $\underline{\underline{2}}$

ADAMS MOULTON $p = 1$

$\alpha = (1 \quad -1 \quad 0)$

$\beta = \left(\frac{5}{12} \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{12}\right)$

Ricorrenza

$$\sum_{j=-1}^{1} (\alpha_j - s\beta_j)\, y_{k-j} = 0 \qquad s = h$$

$$\left(1 - s\frac{5}{12}\right) y_{k+1} + \left(-1 - s\frac{2}{3}\right) y_k + \left(0 + s\frac{1}{12}\right) y_{k-1} = 0$$

shift indice

$$\underbrace{\frac{s}{12}}_{\sigma_0} y_k - \underbrace{\left(1 + \frac{2}{3}s\right)}_{-\sigma_1} y_{k+1} + \underbrace{\left(1 - \frac{5}{12}s\right)}_{\sigma_2} y_{k+2} = 0$$

$$\underbrace{\frac{5}{12}}_{a_0} y_k - \underbrace{\left(1+\frac{2}{3}s\right)}_{-a_1} y_{k+1} + \underbrace{\left(1-\frac{5}{12}s\right)}_{a_2} y_{k+2} = 0$$

$$p(x) = \frac{5}{12} - \left(1+\frac{2}{3}s\right)x + \left(1-\frac{5}{12}s\right)x^2$$

Radici

$$z_{12}(s) = \frac{-4s-6 \pm \sqrt{21s^2+36s+36}}{5s-12}$$

$$s = a+ib \qquad |z_{12}(s)| = |z_{12}(a+ib)| \leq 1$$

La regione di stabilità sono i punti nel piano complesso $a+ib$ che soddisfano $|z_{12}(a+ib)| \leq 1$

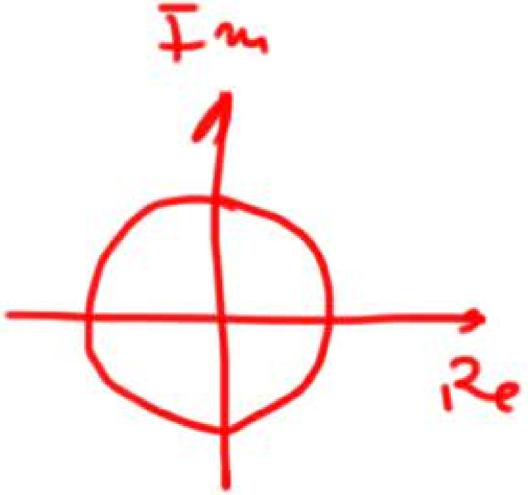
CALCOLO SEMPLIFICATO REGIONE STABILITÀ

$$\underbrace{\frac{s}{12}}_{\alpha_0} y_k - \underbrace{\left(1+\frac{2}{3}s\right)}_{-\alpha_1} y_{k+1} + \underbrace{\left(1-\frac{5}{12}s\right)}_{\alpha_2} y_{k+2} = 0$$

$$p(x) = \frac{s}{12} - \left(1+\frac{2}{3}s\right)x + \left(1-\frac{5}{12}s\right)x^2$$

$$= s\left(\frac{1}{12} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{12}x^2\right) - \left(x + x^2\right)$$

$$= s\,A(x) - B(x) = 0$$



$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow$ numero complesso modulo 1

$$p(e^{\theta i}) = 0 \Rightarrow s\,A(e^{\theta i}) - B(e^{\theta i}) = 0$$

$$\Rightarrow s = \frac{B(e^{\theta i})}{A(e^{\theta i})}$$ Valore di s dove esiste radice con modulo $= 1$

$e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow$ numero complesso modulo 1

$$p(e^{\theta i}) = 0 \Rightarrow sA(e^{\theta i}) - B(e^{\theta i}) = 0$$

$$\Rightarrow s = \frac{B(e^{\theta i})}{A(e^{\theta i})}$$ valore di s dove esiste radice con modulo = 1

$$s(\theta) = \frac{B(e^{\theta i})}{A(e^{\theta i})}$$ = curva chiusa nel piano complesso che CONTIENE il bordo della regione di stabilità

$$s(\theta) = \frac{e^{\theta i} + e^{2\theta i}}{\frac{1}{12} - \frac{2}{3}e^{\theta i} - \frac{5}{12}e^{2\theta i}}$$