La trasformata Z

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Universitá di Trento

anno accademico 2005/2006

Outline

1. La trasformata Z
2. Trasformazioni di segnali elementari
   - Impulso unitario
   - Heaviside discreta o gradino
   - Esponenziale
   - Shift
   - Il segnale n_k e il coefficiente binomiale
   - convoluzione di due segnali
   - I segnali $\cos \omega n$ e $\sin \omega n$
3. Tabella delle trasformate
4. Esempio: successione di Fibonacci
5. Altre proprietá notevoli
6. Antitrasformata Z

Definizione

- La trasformata Z si applica a segnali discreti causali.
- Un segnale discreto si denota con varie notazioni:

$$f_n \; : \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f[n] \; : \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f(n) \; : \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

- La trasformata é definita come:

$$\mathcal{Z}\{f_n\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

- Una notazione piú leggera della Z-trasformata é la seguente:

$$\mathcal{Z}\{f_n\}(z) \equiv \widetilde{f}(z)$$

La trasformata Z

- Utilitá: é usata nell'analisi dei segnali digitali; trasforma

Equazioni alle differenze $\Rightarrow$ Equazioni algebriche

- Analogia con il logaritmo:

$$a \to \log a$$

$$a \cdot b \to \log a + \log b$$

cioé il logaritmo trasforma i prodotti in somme che sono piú facili da maneggiare.

Linearitá della Z-trasformata

Siano f_n e g_n due segnali discreti ed α e β due scalari

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\alpha f_n + \beta g_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha f_n + \beta g_n) z^{-n} \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \\ &= \alpha \mathcal{Z}\{f_n\}(z) + \beta \mathcal{Z}\{g_n\}(z)\end{aligned}$$

Impulso unitario

- L'impulso unitario é definito come segue

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 1 & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

- La sua trasformata si calcola immediatamente

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\delta_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{-n} \\ &= 1\end{aligned}$$

Heaviside discreta o gradino

- Il gradino unitario é definito come segue

$$\mathbf{1} = \{1\}_{n=0}^{\infty}$$

- La sua trasformata si calcola immediatamente

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\delta_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

Esponenziale

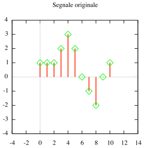
- Trasformata del segnale esponenziale a^n

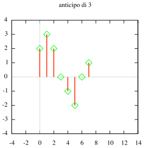
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{a^n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1 - a/z} = \frac{z}{z-a}\end{aligned}$$

- Trasformata del prodotto per l'esponenziale a^n

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{a^n f_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} \\ &= \mathcal{Z}\{f_n\}\left(\frac{z}{a}\right)\end{aligned}$$

Shift (Anticipo temporale) (1/2)



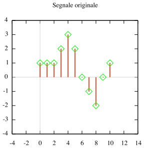


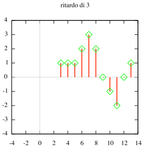
Shift (Anticipo temporale) (2/2)

Trasformata del segnale traslato f_{n+k} con $k > 0$ intero

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{f_{n+k}\right\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} \\
&= z^k \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-(n+k)} \\
&= z^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} - z^k \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \\
&= z^k \left(\mathcal{Z}\left\{f_n\right\}(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n} \right)
\end{aligned}$$

Shift (Ritardo temporale) (1/2)





Shift (Ritardo temporale) (2/2)

Trasformata del segnale traslato f_{n-k} con $k > 0$ intero

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{f_{n-k}\right\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} \\
&= z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)} \\
&= z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \\
&= z^{-k} \mathcal{Z}\left\{f_n\right\}(z)
\end{aligned}$$

Il segnale n_k (1/2)

- Il segnale n_k é definito come segue:

$$n_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

- Casi particolari:
  - $n_0 = 1$;
  - $n_1 = n$.
- Osservando che

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}w^k} w^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)w^{n-k}$$

Possiamo scrivere

$$\mathcal{Z}\{n_k\}(1/w) = \sum_{n=0}^{\infty} n_k w^n = w^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}w^k} \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

Il segnale n_k (2/2)

La trasformata vale:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{n_k\}(1/w) &= w^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}w^k}\frac{1}{1-w} \\ &= w^k \frac{(-1)^k\, k!}{(1-w)^{k+1}} \\ &= -\frac{w^k\, k!}{(w-1)^{k+1}}\end{aligned}$$

e sostituendo $z = 1/w$ otteniamo

$$\mathcal{Z}\{n_k\}(z) = \frac{z\, k!}{(z-1)^{k+1}}$$

Il segnale coefficiente binomiale

- Il segnale é definito come segue:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- Casi particolari:
  - $\binom{n}{0} = 1$;
  - $\binom{n}{1} = n$.
- Osservando che

$$\binom{n}{k} = \frac{n_k}{k!}$$

Possiamo scrivere

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n}{k}\right\}(z) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}$$

Z-trasformata della convoluzione (1/2)

- La convoluzione di due segnali f_n e g_n é definita come segue

$$(f \star g)_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$$

- Per la trasformata della convoluzione $(f \star g)(z) = \mathcal{Z}\{(f \star g)_n\}(z)$ vale la seguente notevole proprietá:

$$(f \star g)(z) = \widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)$$

Z-trasformata della convoluzione (2/2)

La trasformata vale

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{(f\star g)_n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{n-k} f_k g_{n-k} z^{-(n-k)} z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{n-k} g_{n-k} z^{-(n-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n}\right) \\
&= \widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)
\end{aligned}
$$

Il segnali $\cos\omega n$

Usando l'uguaglianza $2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ dove i é l'unitá immaginaria nel campo complesso, possiamo calcolare:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\cos\omega n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\cos\omega n\, z^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\omega n} + e^{-i\omega n})z^{-n} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\omega} z^{-1})^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-i\omega} z^{-1})^n \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{i\omega}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-i\omega}z^{-1}} \\
&= \frac{z}{2}\frac{z-e^{i\omega}+z-e^{-i\omega}}{(z-e^{i\omega})(z-e^{-i\omega})} \\
&= \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}
\end{aligned}
$$

Il segnali $\sin\omega n$

Usando l'uguaglianza $2i\sin\alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}$ dove i é l'unitá immaginaria nel campo complesso, possiamo calcolare:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{\sin\omega n\}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sin\omega n\, z^{-n} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\omega n} - e^{-i\omega n})z^{-n} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\omega} z^{-1})^n - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-i\omega} z^{-1})^n \\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{1-e^{i\omega}z^{-1}} - \frac{1}{2i}\frac{1}{1-e^{-i\omega}z^{-1}} \\
&= \frac{z}{2i}\frac{z-e^{i\omega}-z+e^{-i\omega}}{(z-e^{i\omega})(z-e^{-i\omega})} \\
&= \frac{-z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}
\end{aligned}
$$

Tabella delle trasformate

Segnale	$\mathcal{Z}$-Trasformata	Segnale	$\mathcal{Z}$-Trasformata
δ_n	1	f_{n+k}	$z^k\left(\widetilde{f}(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f_j z^{-j}\right)$
$\mathbf{1}_n$	$\frac{z}{z-1}$	f_{n-k}	$z^{-k}\widetilde{f}(z)$
$\binom{n}{k}$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$	$(f\star g)_n$	$\widetilde{f}(z)\widetilde{g}(z)$
$a^n f_n$	$\widetilde{f}(z/a)$	$a^n\sin\omega n$	$\frac{-za\sin\omega}{z^2-2za\cos\omega+a^2}$
$n^k f_n$	$\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k\widetilde{f}(z)$	$a^n\cos\omega n$	$\frac{z^2-za\cos\omega}{z^2-2za\cos\omega+a^2}$
$\sum_{j=0}^{k} f_k$	$\frac{z}{z-1}\widetilde{f}(z)$		

Attenzione, le funzioni a sinistra delle trasformate devono intendersi uguali a 0 per $t<0$, cioé $f_n \rightarrow \widetilde{f}(s)$ in realtá é $\mathbf{1}_n f_n \rightarrow \widetilde{f}(s)$.

Esempio: successione di Fibonacci (1/3)

- La successione é definita ricorsivamente da

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad F_0 = F_1 = 1$$

Attenzione, se non si vogliono perdere le condizioni iniziali usare sempre lo shift in avanti

- Applicando la Z-trasformata e la regola dello shift

$$z^2\widetilde{F}(z) - F_0 z^2 - F_1 z = z\widetilde{F}(z) - F_0 z + \widetilde{F}(z)$$

- Risolvendo rispetto alla trasformata

$$\widetilde{F}(z) = \frac{F_0 z^2 + (F_1 - F_0)z}{z^2 - z - 1}$$

- ponendo le condizioni iniziali: $F_0 = F_1 = 1$

$$\widetilde{F}(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

Esempio: successione di Fibonacci (2/3)

- dalla decomposizione

$$z^2 - z - 1 = (z - z_1)(z - z^2), \qquad z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\; z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- Dalla espansione in fratti semplici

$$\frac{\widetilde{F}(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2}$$

dove $A = (5 + \sqrt{5})/10$ e $B = (5 - \sqrt{5})/10$, si ottiene

$$\widetilde{F}(z) = \frac{Az}{z - z_1} + \frac{Bz}{z - z_2}$$

Esempio: successione di Fibonacci (3/3)

- Usando la trasformazione $\mathcal{Z}\{a^n\}(z) = z/(z-a)$ otteniamo

$$F_n = Az_1^n + Bz_2^n$$

- sostituendo

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad A = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad B = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

si ottiene

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Teorema del valore iniziale e finale

Teorema (Teorema del valore finale)

Se un segnale f_n raggiunge un limite costante, cioé

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty$$

allora vale

$$f_\infty = \lim_{z\to 1} \frac{z}{z-1}\widetilde{f_n}(z)$$

Teorema (Teorema del valore iniziale)

$$f_0 = \lim_{z\to\infty} \widetilde{f_n}(z)$$

Forma standard della Z-trasformata

- In molte applicazioni la Z-trasformata si puó normalmente scrivere nella forma:

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m}{(z-p_1)^{m_1}(z-p_2)^{m_2}\cdots(z-p_n)^{m_n}}$$

dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

- Possiamo sempre assumere che $\partial P(z) < \partial Q(z)$.
- Come nel caso sella trasformata di Laplace possiamo decomporre la trasformata in fratti semplici:

$$\frac{G(z)}{z} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(z-p_j)^k}$$

Formula esplicita della soluzione

Avendo scritto $G(z)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(z) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_{ji} \frac{z}{(z-p_j)^i}$$

formalmente l'inversa diventa consultando la tabella delle trasformate:

$$G_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_{ji} \binom{k}{i-1} p_j^k$$

Il problema di questa espressione é che se p_j é un numero complesso il termine corrispondente é una funzione a valori complessi della quale non abbiamo definito la Z-trasformata.

Caso generale con radici complesse semplici (1/2)

Per ovviare al problema dei numeri complessi basta raccogliere le radici a due due in modo da avere a che fare solo con funzioni razionali semplici a coefficienti reali.

- Nel caso di radici complesse essendo il polinomio a coefficienti reali saranno a due accoppiate con la loro complessa coniugata.
- In tal caso per evitare coefficienti complessi nella espansione in fratti semplici si possono raccogliere le frazioni corrispondenti alle radici complesse coniugate
- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{\alpha_1}{z-p} + \frac{\alpha_2}{z-\overline{p}}$$

Caso generale con radici complesse semplici (2/2)

- Per prima osserviamo che $\alpha_1 = \overline{\alpha_2}$:

$$\alpha_2 = \lim_{z\to\overline{p}}(z-\overline{p})G(z) = \overline{\lim_{\overline{z}\to p}(\overline{z}-p)G(\overline{z})} = \overline{\lim_{z\to p}(z-p)G(z)} = \overline{\alpha_1}$$

- Quindi ponendo $\alpha = \alpha_1$, $G(z)/z$ si riscrive come

$$\begin{aligned}\frac{G(z)}{z} &= \frac{\alpha}{z-p} + \frac{\overline{\alpha}}{z-\overline{p}} = \frac{\alpha(z-\overline{p}) + \overline{\alpha}(z-p)}{(z-p)(z-\overline{p})} \\ &= \frac{z(\alpha+\overline{\alpha}) - p\overline{\alpha} - \overline{p}\alpha}{z^2 - z(p+\overline{p}) + p\overline{p}} = \frac{2z\,\mathrm{Re}\,(\alpha) - \mathrm{Re}\,(p\overline{\alpha})}{z^2 - 2z\,\mathrm{Re}\,(p) + |p|^2}\end{aligned}$$

- cioé $G(z)$ si puó riscrivere come

$$G(z) = \frac{Az^2 + Bz}{z^2 - 2z\,\mathrm{Re}\,(p) + |p|^2}$$

dove A e B sono due coefficienti reali da determinati da α e p.

Caso generale con radici complesse multiple (1/5)

- Nel caso di radici complesse essendo il polinomio a coefficienti reali saranno a due accoppiate con la loro complessa coniugata.
- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate di molteplicitá m

$$\frac{G(z)}{z} = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\alpha_i}{(z-p)^i} + \frac{\beta_i}{(z-\overline{p})^i} \right]$$

Caso generale con radici complesse multiple (2/5)

- Per prima osserviamo che $\alpha_i = \overline{\beta_i}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{m-i} &= \lim_{z\to\overline{p}} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}z^i}(z-\overline{p})^m G(z) z^{-1} \\
&= \overline{\lim_{\overline{z}\to p} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}z^i}(z-\overline{p})^m G(\overline{z}) \overline{z}^{-1}} \\
&= \overline{\lim_{z\to p} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}z^i}(z-\overline{p})^m} = \overline{\beta_{m-i}}
\end{aligned}$$

- Quindi $G(z)/z$ si riscrive come

$$\frac{G(z)}{z} = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\alpha_i}{(z-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(z-\overline{p})^i} \right]$$

Caso generale con radici complesse multiple (3/5)

- Osserviamo ora che

$$\frac{1}{(z-p)^{k+1}} = (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k} \frac{1}{z-p}$$

- Quindi $G(z)$ si riscrive come

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_{i=1}^{m} z \left[\frac{\alpha_i}{(z-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(z-\overline{p})^i} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} z(-1)^{i-1} \frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}z^{i-1}} \left[\frac{\alpha_i}{z-p} + \frac{\overline{\alpha_i}}{z-\overline{p}} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} z(-1)^{i-1} \frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}z^{i-1}} \left\{ \frac{1}{z} \left[\frac{\alpha_i z}{z-p} + \frac{\overline{\alpha_i} z}{z-\overline{p}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Caso generale con radici complesse multiple (4/5)

- Come nel caso della radice complessa coniugata "singola" possiamo scrivere

$$G(z) = \sum_{i=1}^{m} z(-1)^{i-1} \frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}z^{i-1}} \left(\frac{1}{z} F^{[i]}(z) \right)$$

dove

$$F^{[i]}(z) = \frac{A_i z^2 + B_i z}{z^2 - 2z\,\mathrm{Re}\,(p_i) + |p_i|^2}$$

dove A_i e B_i sono due coefficienti reali da determinati da α_i e p_i.

Caso generale con radici complesse multiple (5/5)

- Sia f_n l'antitrasformata di $f(z)$ allora vale

$$z(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left(\frac{1}{z}f(z)\right) = \mathcal{Z}\left\{f_{n-k}\binom{n}{k}\right\}(z)$$

- usando tale formula l'antitrasformata diventa

$$G_n = \sum_{i=1}^{m} F^{[i]}_{n-i+1}\binom{n}{i-1}$$

dove $F^{[i]}_n$ sono le antitrasformate delle $F^{[i]}(z)$