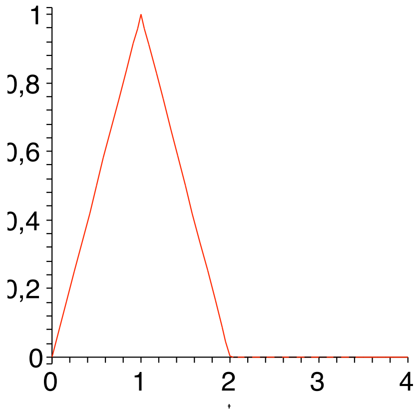
Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria

del 19 giugno 2006

Cognome	Nome	Matricola

[Esercizio 1 - punti 5] Sia data la seguente funzione:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{per } t \in [0,1] \\ 2-t & \text{per } t \in [1,2] \\ 0 & \text{per } t > 2 \end{cases}$$



Usando le regole di trasformazione calcolare le trasformate di Laplace delle funzioni in tabella:

Funzione	Trasformata
$f(t)$	
$f\left(\frac{t}{3}\right)$	
$f\left(\frac{t}{2}\right) e^{-2t}$	
$f(t)'$	

[Esercizio 2 - punti 6] Sia data la seguente equazione differenziale: $y'(t) = f(t)$ dove $f(t)$ è la stessa dell'esercizio n. 1 e il dato iniziale vale $y(0) = 2$. Usando la trasformata Laplace calcolare la soluzione del problema.

Trasformata della equazione differenziale	
Soluzione y(s) della equazione differenziale	
Soluzione y(x) della equazione differenziale	

[Esercizio 3 - punti 7] Usando la trasformata Laplace calcolare la soluzione del problema:

$$\begin{array}{rrrcl} y'(t) & -z'(t) & & = & f(t) \\ -y'(t) & +2\,z'(t) & -w'(t) & = & 0 \\ & -z'(t) & +2w'(t) & = & 0 \end{array}$$

dove $f(t)$ è la stessa dell'esercizio n. 1 e il dato iniziale vale $y(0) = 1,\ z(0) = 2$ e $w(0) = 1$.

Trasformata del sistema di equazioni differenziali	
Soluzione y(s), z(s) del sistema di equazioni differenziali	
Soluzione y(x), z(x) del sistema di equazioni differenziali	

[Esercizio 4 - punti 7] Usando la Z-trasformata calcolare la soluzione della seguente relazione di ricorrenza: $f_{n+2} = 4f_{n+1} - 4f_n - n(n-1)$ con dato iniziale $f_0 = 0$, e $f_1 = 2$.

Z-trasformata della ricorrenza	
Soluzione f(z) della ricorrenza	
Soluzione f_n della ricorrenza	

[Esercizio 5 - punti 5] Sia dato il seguente sistema di equazioni non lineare:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x - y + xy + 1 \\ g(x,y) &= x + 2y - xy - 2 \end{aligned}$$

Scrivere il procedimento iterativo di Newton-Raphson per questo particolare sistema.

Calcolare due iterate del metodo a partire da $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Procedimento iterativo	
Prima iterata	
Seconda iterata	

[Esercizio 6 - punti 7] Minimizzare: $f(x,y,z) = (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$

soggetta ai vincoli $h_1(x,y,z) = (x+y+z)y - 1$ e $h_2(x,y,z) = x - z - 1$.

Sistema non lineare da risolvere	
Soluzioni del sistema non lineare	
Classificazione dei punti stazionari	

[Esercizio 7 - punti 12] Dato il seguente problema:

minimizzare: $\displaystyle\int_0^1 \frac{y(x)}{1+y'(x)}dx$ soggetta ai vincoli $y(0)=1$ e $y(1)=1$.

- Discretizzare l'integrale con il metodo dei trapezi e 4 intervalli.
- Scrivere la funzione in più variabili $F(y_1,y_2,y_3)$ che rappresenta la approssimazione discreta del problema differenziale originario (le condizioni al contorno sono già inglobate).
- Fare il gradiente di $F(y_1,y_2,y_3)$ ottenendo un sistema non lineare.
- Scrivere il metodo di Newton per questo particolare sistema non lineare.
- Fare 3 iterate del metodo di Newton a partire da $(y_1,y_2,y_3) = (1,1,1)$.

$F(y_1, y_2, y_3)$	
Metodo di Newton per il sistema non lineare	
Tre iterate del metodo di Newton	