La trasformata di Fourier

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2005/2006

Outline

La serie di Fourier

- La serie di Fourier per una funzione periodica $f(t)$ di periodo 2π é la seguente

$$S_\infty(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

- dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- Se consideriamo una funzione $g(x)$ di periodo 2ℓ allora la funzione $f(t) = g(t\ell/\pi)$ ha periodo 2π, i coefficienti della serie di Fourier diventano quindi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi)\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\,\mathrm{d}x \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi)\cos kt\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi)\sin kt\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- e la serie di Fourier corrispondente diventa

$$S_\infty(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

- Se consideriamo le formule esponenziali per seno e coseno

$$\sin(x) = i\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2} \qquad \cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

- e le sostituiamo nella serie di Fourier otteniamo

$$\begin{aligned} S_\infty(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2} + b_k\frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} - e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((a_k + ib_k)e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + (a_k - ib_k)e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} \qquad c_k = \begin{cases} a_k + ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} - ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La serie di Fourier | La serie di Fourier scritta con esponenziali complessi

- Dunque in generale una serie di Fourier ha una rappresentazione come serie biinfinita di esponenziali complessi

$$S_\infty(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} \qquad c_k = \begin{cases} a_k + ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} - ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

- per $k \geq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} c_k = a_k + ib_k &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{\ell} + i\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- In modo analogo per $k < 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} c_k = a_{-k} - ib_{-k} &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\left(\cos\frac{-k\pi x}{\ell} - i\sin\frac{-k\pi x}{\ell}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{\ell} + i\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- cioè abbiamo per $k = -\infty, \dots, +\infty$

$$c_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}\,\mathrm{d}x$$

- La serie di Fourier per una funzione periodica $g(t)$ di periodo 2ℓ é la seguente

$$S_\infty(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi t}{\ell}}$$

- dove

$$c_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t)e^{i\frac{k\pi t}{\ell}}\,\mathrm{d}t, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Vogliamo ora calcolare le costanti M_k e φ_k tali che

$$M_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k\right) = a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

- Consideriamo la seguente identità trigonometrica

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

scegliendo $\alpha = \frac{k\pi x}{\ell}$ e $\beta = \varphi_k$ il problema diventa risolvere il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} M_k \cos\varphi_k = a_k \\ M_k \sin\varphi_k = b_k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M_k^2 = a_k^2 + b_k^2, \quad \tan\varphi_k = \frac{b_k}{a_k}$$

- e quindi abbiamo l'ugualianza

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \arctan\frac{b_k}{a_k}\right) = a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

- Usando la precedente uguaglianza la serie di Fourier si può scrivere come

$$S_\infty(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k\right)$$

- dove

$$A_k = \frac{1}{2}\begin{cases} a_0 & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{a_k^2 + b_k^2} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

$$\varphi_k = \arctan\frac{b_k}{a_k}$$

- La precedente forma permette di interpretare in forma significativa i parametri k, A_k e φ_k.

$$S_\infty(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k\right)$$

- la funzione $S_\infty(x)$ è decomposta come somma numerabile di onde semplici dove:
  - k corrisponde alla frequenza di periodo $\frac{kx}{2\ell}$;
  - A_k corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
  - φ_k corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.

- Se consideriamo le formule esponenziali per il coseno

$$\cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

- La precedente forma si può riscrivere come

$$\begin{aligned} S_\infty(x) &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[e^{-i(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k)} + e^{i(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\varphi_k} e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}}, \qquad \varphi_{-k} = -\varphi_k \end{aligned}$$

- Per cui si ottiene $c_k = A_k e^{i\varphi_k}$
  - k corrisponde alla frequenza di periodo $\frac{kx}{2\ell}$;
  - $|c_k|$ corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
  - $\varphi_k = \arctan \mathcal{Im}(c_k)/\mathcal{Re}(c_k)$ corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.

Costruzione della trasformata di Fourier (1/4)

- La serie di Fourier per una funzione periodica $g(t)$ di periodo 2ℓ é la seguente

$$S_\infty(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi t}{\ell}} \qquad c_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{i\frac{k\pi t}{\ell}}\, \mathrm{d}t,$$

- Possiamo immaginare di mandare il semi-periodo $\ell \to \infty$ per trattare funzioni generali.
- Il problema è che in questo caso i coefficienti c_k non sono calcolabili.

Costruzione della trasformata di Fourier (2/4)

- Tenendo fisso is semiperiodo ℓ, se denotiamo con $\lambda = \frac{k\pi}{\ell}$ allora possiamo scrivere:

$$S_\infty(t) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=0,\pm\frac{\pi}{\ell},\pm\frac{2\pi}{\ell}} c(\lambda) e^{-i\lambda t} \qquad c(\lambda) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{i\lambda t}\, \mathrm{d}t,$$

- moltiplicando e dividendo la sommatoria precedente per $\frac{\pi}{\ell}$ possiamo interpretare la sommatoria come una approssimazione numerica di un integrale:

$$S_\infty(t) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\ell}\sum_{\lambda=0,\pm\frac{\pi}{\ell},\pm\frac{2\pi}{\ell}} \frac{\ell}{\pi} c(\lambda) e^{-i\lambda t} \approx \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell}{\pi} c(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda$$

Costruzione della trasformata di Fourier (3/4)

- Chiamando $\tilde{g}(\lambda)$ la seguente funzione

$$\tilde{g}(\lambda) = \frac{\ell}{\pi} c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t,$$

- allora possiamo scrivere

$$S_\infty(t) \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda$$

- A questo punto possiamo mandare il semi-periodo $\ell \to \infty$ per trattare funzioni generali, e se la sommatoria converge all'integrale otteniamo

$$S_\infty(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda \qquad \tilde{g}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}t,$$