

La trasformata di Fourier

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2005/2006



Outline

- 1 La serie di Fourier
 - La serie di Fourier per una funzione di periodo $2l$ [Please insert into preamble]
 - La serie di Fourier scritta con esponenziali complessi
 - La serie di Fourier scritta con coseni e angoli di fase
- 2 La trasformata di Fourier



La serie di Fourier

- La serie di Fourier per una funzione periodica $f(t)$ di periodo 2π è la seguente

$$S_{\infty}(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

- dove

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$$



- Se consideriamo una funzione $g(x)$ di periodo $2l$ allora la funzione $f(t) = g(tl/\pi)$ ha periodo 2π , i coefficienti della serie di Fourier diventano quindi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(tl/\pi) dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(tl/\pi) \cos kt dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(tl/\pi) \sin kt dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l g(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

- e la serie di Fourier corrispondente diventa

$$S_{\infty}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$



- Se consideriamo le formule esponenziali per seno e coseno

$$\sin(x) = i \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2} \quad \cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

- e le sostituiamo nella serie di Fourier otteniamo

$$\begin{aligned} S_{\infty}(x) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2} + b_k \frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} - e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k + ib_k) e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + (a_k - ib_k) e^{i\frac{k\pi x}{\ell}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} \quad c_k = \begin{cases} a_k + ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} - ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$



- Dunque in generale una serie di Fourier ha una rappresentazione come serie biinfinita di esponenziali complessi

$$S_{\infty}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} \quad c_k = \begin{cases} a_k + ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} - ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

- per $k \geq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} c_k = a_k + ib_k &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) \left(\cos \frac{k\pi x}{\ell} + i \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) dx \\ &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) e^{i\frac{k\pi x}{\ell}} dx \end{aligned}$$



- In modo analogo per $k < 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} c_k = a_{-k} - ib_{-k} &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) \left(\cos \frac{-k\pi x}{\ell} - i \sin \frac{-k\pi x}{\ell} \right) dx \\ &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) \left(\cos \frac{k\pi x}{\ell} + i \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) dx \\ &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) e^{i\frac{k\pi x}{\ell}} dx \end{aligned}$$

- cioè abbiamo per $k = -\infty, \dots, +\infty$

$$c_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(x) e^{i\frac{k\pi x}{\ell}} dx$$



- La serie di Fourier per una funzione periodica $g(t)$ di periodo 2ℓ è la seguente

$$S_{\infty}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi t}{\ell}}$$

- dove

$$c_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{i\frac{k\pi t}{\ell}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



- Vogliamo ora calcolare le costanti M_k e φ_k tali che

$$M_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k\right) = a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$

- Consideriamo la seguente identità trigonometrica

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

scegliendo $\alpha = \frac{k\pi x}{\ell}$ e $\beta = \varphi_k$ il problema diventa risolvere il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} M_k \cos \varphi_k = a_k \\ M_k \sin \varphi_k = b_k \end{cases} \Rightarrow M_k^2 = a_k^2 + b_k^2, \quad \tan \varphi_k = \frac{b_k}{a_k}$$

- e quindi abbiamo l'uguaglianza

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \arctan \frac{b_k}{a_k}\right) = a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$$



- Usando la precedente uguaglianza la serie di Fourier si può scrivere come

$$S_{\infty}(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k\right)$$

- dove

$$A_k = \frac{1}{2} \begin{cases} a_0 & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{a_k^2 + b_k^2} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}$$



- La precedente forma permette di interpretare in forma significativa i parametri k , A_k e φ_k .

$$S_{\infty}(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k\right)$$

- la funzione $S_{\infty}(x)$ è decomposta come somma numerabile di onde semplici dove:

- k corrisponde alla frequenza di periodo $\frac{\ell}{k}$;
- A_k corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
- φ_k corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.



- Se consideriamo le formule esponenziali per il coseno

$$\cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

- La precedente forma si può riscrivere come

$$\begin{aligned} S_{\infty}(x) &= \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[e^{-i\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k\right)} + e^{i\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \varphi_k\right)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\varphi_k} e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}}, \quad \varphi_{-k} = -\varphi_k \end{aligned}$$

- Per cui si ottiene $c_k = A_k e^{i\varphi_k}$

- k corrisponde alla frequenza di periodo $\frac{\ell}{|k|}$;
- $|c_k|$ corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
- $\varphi_k = \arctan \frac{\text{Im}(c_k)}{\text{Re}(c_k)}$ corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.



Costruzione della trasformata di Fourier

(1/4)

- La serie di Fourier per una funzione periodica $g(t)$ di periodo 2ℓ è la seguente

$$S_{\infty}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\pi t/\ell} \quad c_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{ik\pi t/\ell} dt,$$

- Possiamo immaginare di mandare il semi-periodo $\ell \rightarrow \infty$ per trattare funzioni generali.
- Il problema è che in questo caso i coefficienti c_k non sono calcolabili.



Costruzione della trasformata di Fourier

(2/4)

- Tenendo fisso il semi-periodo ℓ , se denotiamo con $\lambda = \frac{k\pi}{\ell}$ allora possiamo scrivere:

$$S_{\infty}(t) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0, \pm\frac{\pi}{\ell}, \pm\frac{2\pi}{\ell}} c(\lambda) e^{-i\lambda t} \quad c(\lambda) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{i\lambda t} dt,$$

- moltiplicando e dividendo la sommatoria precedente per $\frac{\pi}{\ell}$ possiamo interpretare la sommatoria come una approssimazione numerica di un integrale:

$$S_{\infty}(t) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\ell} \sum_{\lambda=0, \pm\frac{\pi}{\ell}, \pm\frac{2\pi}{\ell}} \frac{\ell}{\pi} c(\lambda) e^{-i\lambda t} \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ell}{\pi} c(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda$$



Costruzione della trasformata di Fourier

(3/4)

- Chiamando $\bar{g}(\lambda)$ la seguente funzione

$$\bar{g}(\lambda) = \frac{\ell}{\pi} c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{i\lambda t} dt,$$

- allora possiamo scrivere

$$S_{\infty}(t) \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda$$

- A questo punto possiamo mandare il semi-periodo $\ell \rightarrow \infty$ per trattare funzioni generali, e se la sommatoria converge all'integrale otteniamo

$$S_{\infty}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda \quad \bar{g}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{i\lambda t} dt,$$

