

# La trasformata di Laplace

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2005/2006



## Outline

- 1 La trasformata di Laplace
- 2 Proprietá della Trasformata
- 3 Calcolo di alcune trasformate
  - Trasformata della funzione di Heaviside  $u(t)$
  - Trasformata della crescita polinomiale  $t^k u(t)$
  - Trasformata della crescita esponenziale  $a^{bt} u(t)$
  - Funzioni trasformabili
  - Trasformazione delle derivate e integrali
- 4 Altre proprietá della trasformata di Laplace
- 5 Tabella delle trasformate
- 6 Antitrasformata di Laplace
  - Decomposizione in fratti semplici



# La trasformata di Laplace

- Definizione

$$f \rightarrow F = \mathcal{L}\{f\}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- Utilità: trasforma

**Equazioni differenziali**  $\Rightarrow$  **Equazioni algebriche**

- Analogia con il logaritmo:

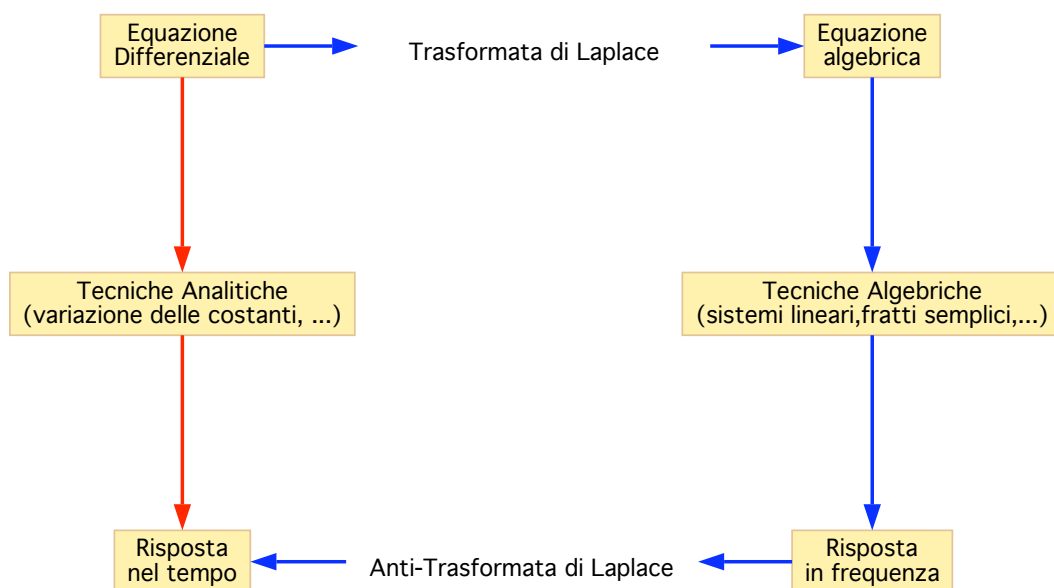
$$a \rightarrow \log a$$

$$a \cdot b \rightarrow \log a + \log b$$

cioè il logaritmo trasforma i **prodotti** in **somme** che sono più facili da maneggiare.



## Uso della trasformata di Laplace per risolvere ODE



# Proprietá della Trasformata

- Linearitá

$$\mathcal{L} \{af(t) + bg(t)\} (s) = a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s)$$

- Traslazione

$$\mathcal{L} \{e^{at}f(t)\} (s) = \hat{f}(s - a)$$

$$\mathcal{L} \{f(t - a)\} (s) = e^{-as}\hat{f}(s)$$

- Cambio di scala

$$\mathcal{L} \{f(at)\} (s) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$



## Trasformata della funzione di Heaviside $u(t)$

- Definizione della funzione di Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo  $\text{RE}(s) > 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{u\} (s) = \hat{u}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{s}e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$



## Trasformata della crescita lineare $tu(t)$

- Definizione della funzione di crescita lineare

$$p_1(t) = tu(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo  $\text{RE}(s) > 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{p_1\}(s) &= \hat{p}_1(s) = \int_{0^-}^{\infty} tu(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st} dt \\ &= \left[ -\frac{t}{s}e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \left[ -\frac{1}{s}e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$



## Trasformata della crescita polinomiale $t^k u(t)$

- Definizione della funzione di crescita polinomiale

$$p_k(t) = t^k u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t^k & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo  $\text{RE}(s) > 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{p_k\}(s) &= \hat{p}_k(s) = \int_{0^-}^{\infty} t^k u(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} t^k e^{-st} dt \\ &= \left[ -\frac{t^k}{s}e^{-st} \right]_0^{\infty} + \frac{k}{s} \int_{0^-}^{\infty} t^{k-1} e^{-st} dt \\ &= 0 + \frac{k}{s} \mathcal{L}\{p_{k-1}\}(s) \end{aligned}$$

- Usando l'induzione e tenendo conto che  $\hat{p}_1(s) = \frac{1}{s^2}$  si ha

$$\hat{p}_k(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$



## Trasformata della crescita esponenziale $a^{bt}u(t)$

- Definizione della funzione di crescita esponenziale

$$v(t) = a^{bt} u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ a^{bt} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo  $\text{RE}(s) > b \log a$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{p_k\}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} a^{bt} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} a^{bt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{bt \log a} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{(b \log a - s)t} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{(b \log a - s)} e^{(b \log a - s)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{b \log a - s} \end{aligned}$$



## Funzioni trasformabili

(1/2)

- Non tutte le funzioni sono trasformabili, ad esempio

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{t^2}\}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{t^2 - st} dt \\ &= \int_0^T e^{(t-s)t} dt + \int_T^{\infty} e^{(t-s)t} dt \end{aligned}$$

per ogni valore di  $s$  scegliendo  $T > \text{RE}(s)$  si ha che  $\int_T^{\infty} e^{(t-s)t} dt$  non é convergente e quindi la funzione non é trasformabile per nessun valore di  $s$ .



## Funzioni trasformabili

(2/2)

- Se  $f(t)$  é generalmente continua con limite di crescita:  
 $|f(t)| \leq Me^{Nt}$  per  $t \geq T$  allora é Laplace-trasformabile:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^T f(t)e^{-st} dt + \int_T^\infty f(t)e^{-st} dt$$

Infatti

$$\begin{aligned} \left| \int_T^\infty f(t)e^{-st} dt \right| &\leq \int_T^\infty |f(t)e^{-st}| dt \leq \int_T^\infty Me^{Nt} |e^{-st}| dt \\ &= \int_T^\infty Me^{Nt} e^{-\operatorname{Re}(s)t} dt = M \int_T^\infty e^{(N-\operatorname{Re}(s))t} dt \end{aligned}$$

ed per  $\operatorname{Re}(s) > N$  si ha che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_T^\infty e^{(N-\operatorname{Re}(s))t} dt = 0$$



## trasformazione della derivata prima

(1/2)

## Teorema (Laplace trasformata della derivata prima)

Sia  $f \in C^1(0, \infty)$ , la trasformata della derivata prima diventa:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\widehat{f}(s) - f(0^+)$$

dove  $f(0^+) = \lim_{\beta \downarrow 0} f(\beta)$ .

**Derivazione:** Sia  $\operatorname{Re}(s) > 0$  e  $0 < \beta < \epsilon$ :

$$\begin{aligned} \int_\beta^\infty f'(t)e^{-st} dt &= [f(t)e^{-st}]_\beta^\infty + s \int_\beta^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= -f(\beta)e^{-s\beta} + s \int_\beta^\infty f(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

poichè  $f(t) = 0$  per  $t < 0$  abbiamo  $\int_{-\epsilon}^{-\beta} f'(t)e^{-st} dt = 0$



## trasformazione delle derivata prima

(2/2)

da cui abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\epsilon}^{\beta} f'(t)e^{-st} dt + \int_{\beta}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \right] \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ -f(\beta)e^{-s\beta} + s \int_{\beta}^{\infty} f(t)e^{-st} dt + 0 \right] \\ &= -f(0^+) + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \{ f'(t) \} (s) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\epsilon}^T f'(t)e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt \\ &= -f(0^+) + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

trasformazione della derivata  $k$ -esimaTeorema (Laplace trasformata della derivata  $k$ -esima)

Sia  $f \in \mathcal{C}^k(0, \infty)$ , la trasformata della derivata  $k$ -esima diventa:

$$\mathcal{L} \{ f^{(k)}(t) \} (s) = s^k \hat{f}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i-1)}(0^+)$$

dove  $f^{(j)}(0^+) = \lim_{\beta \downarrow 0} f^{(j)}(\beta)$ .

**Derivazione:** La derivazione é del tutto analoga alla derivazione per la derivata prima applicando  $k$  volte l'integrazione per parti.



## trasformazione dell'integrale

## Teorema (Laplace trasformata dell'integrale)

Sia  $f(t)$  regolare a tratti, e  $g(t)$  definita come segue

$$g(t) = \int_0^t f(z) dz$$

la trasformata  $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \widehat{g}(s)$  diventa:

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{s} \widehat{f}(s).$$

**Derivazione:** Basta applicare la regola di derivazione per la funzione  $g(t)$  e osservare che  $g'(t) = f(t)$  e  $g(0) = 0$ .



## Valori iniziali e finali

## Teorema (Teorema del valore iniziale)

$$\lim_{t \downarrow 0} f(t) = \lim_{|s| \rightarrow \infty} s \widehat{f}(s)$$

## Teorema (Teorema del valore finale)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \widehat{f}(s)$$

Attenzione perchè i limiti che contengono  $s$  sono da intendere nel caso complesso, ed in particolare il limite  $\lim_{|s| \rightarrow \infty}$  deve essere indipendente da come  $s$  va all'infinito.





- Moltiplicazione per  $t^n$

$$\mathcal{L} \{t^n f(t)\} (s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s)$$

- Divisione per  $t$ . Sia  $g(t) = tf(t)$  allora per la formula precedente

$$\mathcal{L} \{g(t)\} (s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L} \{f(t)\} (s)$$

che può essere scritto come:  $\frac{d}{ds} \mathcal{L} \left\{ \frac{g(t)}{t} \right\} (s) = -\hat{g}(s)$  o meglio

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{g(t)}{t} \right\} (s) = -\int \hat{g}(s) ds + C = \hat{h}(s)$$

La costante complessa  $C$  va scelta in modo che  $\hat{h}(s)$  soddisfi i teoremi del valore iniziale e finale. Ovviamente  $\lim_{t \downarrow 0} g(t)/t$  esiste ed è finito.



### Teorema (Traformazione di funzioni periodiche)

Sia  $f(t+T) = f(t)$  per  $t > 0$  allora vale

$$\mathcal{L} \{f(t)\} (s) = \frac{\int_0^T f(t) e^{-st} dt}{1 - e^{-sT}}$$

### Teorema (Traformazione del prodotto di convoluzione)

Sia  $(f \star g)(t)$  definita come segue:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(z) g(t-z) dz$$

allora vale

$$\mathcal{L} \{f \star g\} (s) = \hat{f}(s) \hat{g}(s)$$



## Tabella delle trasformate

| Funzione                     | Trasformata                                  | Funzione                | Trasformata  |
|------------------------------|--|-------------------------|--|
| 1                            | $\frac{1}{s}$                                | $e^{at} \cos \omega t$  | $\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$                               |
| $e^{at} t^n$                 | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$                     | $e^{at} \sin \omega t$  | $\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$                            |
| $e^{\alpha t} - e^{\beta t}$ | $\frac{\alpha - \beta}{(s-\alpha)(s-\beta)}$ | $e^{at} \cosh \omega t$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2 - \omega^2}$                               |
| $e^{\alpha t} f(t)$          | $\widehat{f}(s - \alpha)$                    | $e^{at} \sinh \omega t$ | $\frac{\omega}{(s-a)^2 - \omega^2}$                            |
| $f(t - \alpha)$              | $e^{-\alpha s} \widehat{f}(s)$               | $t^n f(t)$              | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \widehat{f}(s)$                       |
| $\int_0^t f(z) dz$           | $\frac{1}{s} \widehat{f}(s)$                 | $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$ | $s^n \widehat{f}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1} f^{(j)}(0^+)$ |

Attenzione, le funzioni a sinistra delle trasformate devono intendersi uguali a 0 per  $t < 0$ , cioè  $f(t) \rightarrow \widehat{f}(s)$  in realtà é  $u(t)f(t) \rightarrow \widehat{f}(s)$  dove  $u(t)$  é la funzione di Heaviside.



## Forma standard della trasformata di Laplace

(1/2)

- Nelle applicazioni elettriche o meccaniche la trasformata di Laplace si può normalmente scrivere nella forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{(s - p_1)^{m_1} (s - p_2)^{m_2} \dots (s - p_n)^{m_n}}$$

dove  $p_i \neq p_j$  se  $i \neq j$ .

- Possiamo sempre assumere che  $\partial P(s) < \partial Q(s)$  in caso contrario usando la divisione di polinomi con resto:

$$P(s) = Q(s)A(s) + B(s) \quad \partial B(s) < \partial Q(s)$$

e quindi

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = A(s) + \frac{B(s)}{Q(s)}$$



- La antitrasformata di un polinomio

$$A(s) = a_0 + a_1s + \cdots + a_ns^n$$

formalmente é la seguente

$$\mathcal{L} \{A(s)\}^{-1}(t) = a_0\delta(t) + a_1\delta^{(1)}(t) + \cdots + a_n\delta^{(n)}(t)$$

- Le **“funzioni”**  $\delta^{(k)}(t)$  sono le derivate  $k$ -esime nel senso delle distribuzioni della delta di Dirac ed hanno la propriet :
  - A parte l'impulso unitario ( $\delta(t)$ ) normalmente le derivate dell'impulso non si trovano nelle applicazioni considerate.
  - Possiamo quindi considerare unicamente l'antitrasformata della funzione razionale  $P(s)/Q(s)$  con  $\partial P(s) < \partial Q(s)$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(k)}(t) dt = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

- A parte l'impulso unitario ( $\delta(t)$ ) normalmente le derivate dell'impulso non si trovano nelle applicazioni considerate.
- Possiamo quindi considerare unicamente l'antitrasformata della funzione razionale  $P(s)/Q(s)$  con  $\partial P(s) < \partial Q(s)$ .



## Caso radici semplici

Data la funzione razionale nella variabile complessa  $s$ ;

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \cdots + b_ms^m}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)} \quad (m < n)$$

dove  $p_i \neq p_j$  se  $i \neq j$ . Possiamo riscrivere  $G(s)$  come somma di fratti semplici

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}$$

dove:

$$\alpha_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)G(s)$$

infatti

$$(s - p_i)G(s) = \alpha_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \frac{s - p_i}{s - p_j}$$



## Caso radici multiple

Nel caso di radici multiple ad esempio nel caso di una singola radice  $p$  di molteplicità  $n$

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{(s-p)^n} \quad (m < n)$$

Possiamo ancora riscrivere  $G(s)$  come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p} + \frac{\alpha_2}{(s-p)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(s-p)^n}$$

dove:

$$\alpha_{n-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^k}{ds^k} [(s-p)^n G(s)], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

infatti

$$(s-p)^n G(s) = \alpha_1(s-p)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}(s-p) + \alpha_n$$



## Caso generale

Nel caso generale

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2} \dots (s-p_k)^{m_k}} \quad (m < m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$

dove  $m_i$  è la molteplicità della radice  $p_i$ . Possiamo ancora riscrivere  $G(s)$  come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s-p_j)^k}$$

dove:

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{(m_j - k)!} \lim_{s \rightarrow p_j} \underbrace{\frac{d}{ds} \dots \frac{d}{ds}}_{m_j - k \text{ VOLTE}} [(s-p_j)^{m_j} G(s)], \quad k = 1, \dots, m_j$$



## Formula esplicita della soluzione

Avendo scritto  $G(s)$  come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s - p_j)^k}$$

formalmente l'inversa diventa consultando la tabella delle trasformate:

$$G(t) = \mathcal{L} \{G(s)\}^{-1} (t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(k-1)!} e^{p_j t} t^k$$

Il problema di questa espressione é che se  $p_j$  é un numero complesso il termine corrispondente é una funzione a valori complessi della quale non abbiamo definito la trasformata di Laplace.



## Caso generale con radici complesse semplici

(1/4)

Per ovviare al problema dei numeri complessi basta **raccogliere** le radici a due due in modo da avere a che fare solo con funzioni razionali semplici a coefficienti reali.

- Nel caso di radici complesse essendo il polinomio a coefficienti reali saranno a due accoppiate con la loro complessa coniugata.
- In tal caso per evitare coefficienti complessi nella espansione in fratti semplici si possono raccogliere le frazioni corrispondenti alle radici complesse coniugate
- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s - p} + \frac{\alpha_2}{s - \bar{p}}$$



## Caso generale con radici complesse semplici

(2/4)

- Per prima osserviamo che  $\alpha_1 = \overline{\alpha_2}$ :

$$\alpha_2 = \lim_{s \rightarrow \overline{p}} (s - \overline{p})G(s) = \overline{\lim_{\overline{s} \rightarrow p} (\overline{s} - p)G(\overline{s})} = \overline{\lim_{s \rightarrow p} (s - p)G(s)} = \overline{\alpha_1}$$

- Quindi ponendo  $\alpha = \alpha_1$ ,  $G(s)$  si riscrive come

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\alpha}{s - p} + \frac{\overline{\alpha}}{s - \overline{p}} = \frac{\alpha(s - \overline{p}) + \overline{\alpha}(s - p)}{(s - p)(s - \overline{p})} \\ &= \frac{s(\alpha + \overline{\alpha}) - p\overline{\alpha} - \overline{p}\alpha}{s^2 - s(p + \overline{p}) + p\overline{p}} \\ &= 2 \operatorname{RE}(\alpha) \frac{s - \operatorname{RE}(p\overline{\alpha}) / \operatorname{RE}(\alpha)}{s^2 - 2s \operatorname{RE}(p) + |p|^2} \end{aligned}$$



## Caso generale con radici complesse semplici

(3/4)

- Osserviamo inoltre che:

$$\begin{aligned} s^2 - 2s \operatorname{RE}(p) + |p|^2 &= (s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2 \\ \frac{\operatorname{RE}(p\overline{\alpha})}{\operatorname{RE}(\alpha)} &= \operatorname{RE}(p) + \frac{\operatorname{IM}(\alpha) \operatorname{IM}(p)}{\operatorname{RE}(\alpha)} \end{aligned}$$

- cioè  $G(s)$  si può riscrivere come

$$\begin{aligned} G(s) &= 2 \operatorname{RE}(\alpha) \frac{s - \operatorname{RE}(p) - \operatorname{IM}(\alpha) \operatorname{IM}(p) / \operatorname{RE}(\alpha)}{(s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2} \\ &= 2 \operatorname{RE}(\alpha) \frac{s - \operatorname{RE}(p)}{(s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2} \\ &\quad - 2 \operatorname{IM}(\alpha) \frac{\operatorname{IM}(p)}{(s - \operatorname{RE}(p))^2 + \operatorname{IM}(p)^2} \end{aligned}$$



## Caso generale con radici complesse semplici

(4/4)

- e quindi l'antitrasformata diventa analizzando la tabella delle trasformate standard

$$G(t) = 2 \operatorname{Re}(\alpha) e^{\operatorname{Re}(p)t} \cos \operatorname{Im}(p) t \\ - 2 \operatorname{Im}(\alpha) e^{\operatorname{Re}(p)t} \sin \operatorname{Im}(p) t$$



## Caso generale con radici complesse multiple

(1/5)

- Nel caso di radici complesse essendo il polinomio a coefficienti reali saranno a due accoppiate con la loro complessa coniugata.
- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate di molteplicità  $m$

$$G(s) = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\beta_i}{(s-\bar{p})^i} \right]$$



## Caso generale con radici complesse multiple

(2/5)

- Per prima osserviamo che  $\alpha_i = \overline{\beta_i}$ :

$$\begin{aligned}\alpha_{m-i} &= \lim_{s \rightarrow \overline{p}} \frac{d^i}{ds^i} (s - \overline{p})^m G(s) \\ &= \overline{\lim_{\overline{s} \rightarrow p} \frac{d^i}{d\overline{s}^i} (s - \overline{p})^m G(\overline{s})} \\ &= \lim_{s \rightarrow p} \frac{d^i}{ds^i} (s - \overline{p})^m = \overline{\beta_{m-i}}\end{aligned}$$

- Quindi  $G(s)$  si riscrive come

$$G(s) = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(s-\overline{p})^i} \right]$$



## Caso generale con radici complesse multiple

(3/5)

- Osserviamo ora che

$$\frac{1}{(s-p)^{k+1}} = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s-p}$$

- Quindi  $G(s)$  si riscrive come

$$\begin{aligned}G(s) &= \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(s-\overline{p})^i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[ \frac{\alpha_i}{s-p} + \frac{\overline{\alpha_i}}{s-\overline{p}} \right]\end{aligned}$$





## Caso generale con radici complesse multiple

(4/5)

- Come nel caso della radice complessa coniugata “singola” possiamo scrivere

$$G(s) = 2 \sum_{i=1}^m \operatorname{RE}(\alpha_i) (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[ \frac{s - \operatorname{RE}(p_i)}{(s - \operatorname{RE}(p_i))^2 + \operatorname{IM}(p_i)^2} \right] \\ - 2 \sum_{i=1}^m \operatorname{IM}(\alpha_i) (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[ \frac{\operatorname{IM}(p_i)}{(s - \operatorname{RE}(p_i))^2 + \operatorname{IM}(p_i)^2} \right]$$



## Caso generale con radici complesse multiple

(5/5)

- ricordando la regola  $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \widehat{f}(s)$  possiamo scrivere l'antitrasformata come:

$$G(t) = 2 \sum_{i=1}^m \operatorname{RE}(\alpha_i) t^{i-1} e^{\operatorname{RE}(p_i)t} \cos \operatorname{IM}(p_i)t \\ - 2 \sum_{i=1}^m \operatorname{IM}(\alpha_i) t^{i-1} e^{\operatorname{RE}(p_i)t} \sin \operatorname{IM}(p_i)t$$

