La trasformata di Laplace

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Universitá di Trento

anno accademico 2005/2006

Outline

La trasformata di Laplace

- Definizione

$$f \to F = \mathfrak{L}\{f\}$$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

- Utilitá: trasforma

Equazioni differenziali $\Rightarrow$ Equazioni algebriche

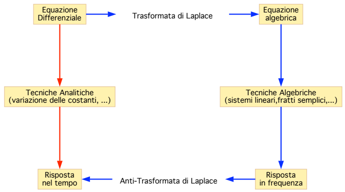
- Analogia con il logaritmo:

$$a \to \log a$$

$$a \cdot b \to \log a + \log b$$

cioé il logaritmo trasforma i prodotti in somme che sono piú facili da maneggiare.

Uso della trasformata di Laplace per risolvere ODE



Proprietá della Trasformata

- Linearitá

$$\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\}(s) = a\widehat{f}(s) + b\widehat{g}(s)$$

- Traslazione

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}(s) = \widehat{f}(s-a)$$

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)\right\}(s) = e^{-as}\widehat{f}(s)$$

- Cambio di scala

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}(s) = \frac{1}{a}\widehat{f}(s)$$

Trasformata della funzione di Heaviside $u(t)$

- Definizione della funzione di Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{RE}(s) > 0$):

$$\mathcal{L}\left\{u\right\}(s) = \widehat{u}(s) = \int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Trasformata della crescita lineare $tu(t)$

- Definizione della funzione di crescita lineare

$$p_1(t) = t\,u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{RE}(s) > 0$):

$$\mathcal{L}\left\{p_1\right\}(s) = \widehat{p_1}(s) = \int_{0^-}^{\infty} t\,u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

Trasformata della crescita polinomiale $t^k u(t)$

- Definizione della funzione di crescita polinomale

$$p_k(t) = t^k\,u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t^k & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{RE}(s) > 0$):

$$\mathcal{L}\left\{p_k\right\}(s) = \widehat{p_k}(s) = \int_{0^-}^{\infty} t^k\,u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} t^k e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{t^k}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} + \frac{k}{s}\int_{0^-}^{\infty} t^{k-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= 0 + \frac{k}{s}\mathcal{L}\left\{p_{k-1}\right\}(s)$$

- Usando l'induzione e tenendo conto che $\widehat{p_1}(s) = \dfrac{1}{s^2}$ si ha

$$\widehat{p_k}(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

Trasformata della crescita esponenziale $a^{b\,t}u(t)$

- Definizione della funzione di crescita esponenziale

$$v(t) = a^{bt}\, u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ a^{bt} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{Re}\,(s) > b \log a$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\,\{p_k\}\,(s) &= \int_{0^-}^{\infty} a^{bt}\, u(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} a^{bt} e^{-st}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{bt \log a} e^{-st}\, \mathrm{d}t = \int_{0^-}^{\infty} e^{(b \log a - s)t}\, \mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{(b \log a - s)} e^{(b \log a - s)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{b \log a - s} \end{aligned}$$

Funzioni trasformabili (1/2)

- Non tutte le funzioni sono trasformabili, ad esempio

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{e^{t^2}\right\}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{t^2 - st}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T e^{(t-s)t}\, \mathrm{d}t + \int_T^{\infty} e^{(t-s)t}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

per ogni valore di s scegliendo $T > \mathrm{Re}\,(s)$ si ha che $\int_T^{\infty} e^{(t-s)t}\, \mathrm{d}t$ non é convergente e quindi la funzione non é trasformabile per nessun valore di s.

Funzioni trasformabili (2/2)

- Se $f(t)$ é generalmente continua con limite di crescita: $|f(t)| \leq Me^{Nt}$ per $t \geq T$ allora é Laplace-trasformabile:

$$\mathcal{L}\,\{f\}\,(s) = \int_0^T f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t + \int_T^{\infty} f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

Infatti

$$\begin{aligned} \left| \int_T^{\infty} f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t \right| &\leq \int_T^{\infty} \left| f(t) e^{-st} \right| \mathrm{d}t \leq \int_T^{\infty} Me^{Nt} \left| e^{-st} \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_T^{\infty} Me^{Nt} e^{-\mathrm{Re}(s)t}\, \mathrm{d}t = M \int_T^{\infty} e^{(N - \mathrm{Re}(s))t}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

ed per $\mathrm{Re}\,(s) > N$ si ha che

$$\lim_{T \to \infty} \int_T^{\infty} e^{(N - \mathrm{Re}(s))t}\, \mathrm{d}t = 0$$

trasformazione della derivata prima (1/2)

Teorema (Laplace trasformata della derivata prima)

Sia $f \in \mathrm{C}^1(0, \infty)$, *la trasformata della derivata prima diventa:*

$$\mathcal{L}\,\{f'(t)\}\,(s) = s\widehat{f}(s) - f(0^+)$$

dove $f(0^+) = \lim_{\beta \downarrow 0} f(\beta)$.

Derivazione: Sia $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ e $0 < \beta < \epsilon$:

$$\begin{aligned} \int_\beta^{\infty} f'(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t &= \left[f(t) e^{-st} \right]_\beta^{\infty} + s \int_\beta^{\infty} f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t \\ &= -f(\beta) e^{-s\beta} + s \int_\beta^{\infty} f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

poichè $f(t) = 0$ per $t < 0$ abbiamo $\int_{-\epsilon}^{-\beta} f'(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t = 0$

trasformazione delle derivata prima (2/2)

da cui abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \lim_{\beta\to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{\beta} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_{\beta}^{\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \lim_{\beta\to 0}\left[-f(\beta)e^{-s\beta} + s\int_{\beta}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + 0\right] \\ &= -f(0^+) + s\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{T\to\infty}\int_{-\epsilon}^{T} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= -f(0^+) + s\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

trasformazione della derivata k-esima

Teorema (Laplace trasformata della derivata k-esima)

Sia $f \in C^k(0,\infty)$, la trasformata della derivata k-esima diventa:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(k)}(t)\right\}(s) = s^k\widehat{f}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i-1)}(0^+)$$

dove $f^{(j)}(0^+) = \lim_{\beta\downarrow 0} f^{(j)}(\beta)$.

Derivazione: La derivazione é del tutto analoga alla derivazione per la derivata prima applicando k volte l'integrazione per parti.

trasformazione dell'integrale

Teorema (Laplace trasformata dell integrale)

Sia $f(t)$ regolare a tratti, e $g(t)$ definita come segue

$$g(t) = \int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$$

la trasformata $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s) = \widehat{g}(s)$ diventa:

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{s}\widehat{f}(s).$$

Derivazione: Basta applicare la regola di derivazione per la funzione $g(t)$ e osservare che $g'(t) = f(t)$ e $g(0) = 0$.

Valori iniziali e finali

Teorema (Teorema del valore iniziale)

$$\lim_{t\downarrow 0} f(t) = \lim_{|s|\to\infty} s\widehat{f}(s)$$

Teorema (Teorema del valore finale)

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\widehat{f}(s)$$

Attenzione perchè i limiti che contengono s sono da intendere nel caso complesso, ed in particolare il limite $\lim_{|s|\to\infty}$ deve essere indipendente da come s va all'infinito.

- Moltiplicazione per t^n

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}(s) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\widehat{f}(s)$$

- Divisione per t. Sia $g(t) = t f(t)$ allora per la formula precedente

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

che puó essere scritto come: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\}(s) = -\widehat{g}(s)$ o meglio

$$\mathcal{L}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\}(s) = -\int \widehat{g}(s)\,\mathrm{d}s + C = \widehat{h}(s)$$

La costante complessa C va scelta in modo che $\widehat{h}(s)$ soddisfi i teoremi del valore iniziale e finale. Ovviamente $\lim_{t\downarrow 0} g(t)/t$ esiste ed é finito.

Teorema (Traformazione di funzioni periodiche)

Sia $f(t+T) = f(t)$ per $t > 0$ allora vale

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1-e^{-sT}}$$

Teorema (Traformazione del prodotto di convoluzione)

Sia $(f \star g)(t)$ definita come segue:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(z)g(t-z)\,\mathrm{d}z$$

allora vale

$$\mathcal{L}\left\{f \star g\right\}(s) = \widehat{f}(s)\,\widehat{g}(s)$$

Tabella delle trasformate

Funzione	Trasformata	Funzione	Trasformata
1	$\frac{1}{s}$	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}-e^{\beta t}$	$\frac{\alpha-\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	$e^{at}\cosh\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$
$e^{\alpha t}f(t)$	$\widehat{f}(s-\alpha)$	$e^{at}\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
$f(t-\alpha)$	$e^{-\alpha s}\widehat{f}(s)$	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\widehat{f}(s)$
$\int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$	$\frac{1}{s}\widehat{f}(s)$	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)$	$s^n\widehat{f}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-j-1}f^{(j)}(0^+)$

Attenzione, le funzioni a sinistra delle trasformate devono intendersi uguali a 0 per $t < 0$, cioé $f(t) \rightarrow \widehat{f}(s)$ in realtá é $u(t)f(t) \rightarrow \widehat{f}(s)$ dove $u(t)$ é la funzione di Heaviside.

Forma standard della trasformata di Laplace (1/2)

- Nelle applicazioni elettriche o meccaniche la trasformata di Laplace si puó normalmente scrivere nella forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2}\cdots(s-p_n)^{m_n}}$$

dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

- Possiamo sempre assumere che $\partial P(s) < \partial Q(s)$ in caso contrario usando la divisione di polinomi con resto:

$$P(s) = Q(s)A(s) + B(s) \qquad \partial B(s) < \partial Q(s)$$

e quindi

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = A(s) + \frac{B(s)}{Q(s)}$$

Forma standard della trasformata di Laplace (2/2)

- La antitrasformata di un polinomio

$$A(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n$$

formalmente é la seguente

$$\mathcal{L}\left\{A(s)\right\}^{-1}(t) = a_0\delta(t) + a_1\delta^{(1)}(t) + \cdots + a_n\delta^{(n)}(t)$$

- Le "funzioni" $\delta^{(k)}(t)$ sono le derivate k-esime nel senso delle distribuzioni della delta di Dirac ed hanno la proprietá:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

- A parte l'impulso unitario ($\delta(t)$) normalmente le derivate dell'impulso non si trovano nelle applicazioni considerate.
- Possiamo quindi considerare unicamente l'antitrasformata della funzione razionale $P(s)/Q(s)$ con $\partial P(s) < \partial Q(s)$.

Caso radici semplici

Data la funzione razionale nella variabile complessa s;

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \qquad (m < n)$$

dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$. Possiamo riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \frac{\alpha_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s-p_n}$$

dove:

$$\alpha_i = \lim_{s\to p_i}(s-p_i)G(s)$$

infatti

$$(s-p_i)G(s) = \alpha_i + \sum_{j\neq i}\alpha_j\frac{s-p_i}{s-p_j}$$

Caso radici multiple

Nel caso di radici multiple ad esempio nel caso di una singola radice p di molteplicitá n

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p)^n} \qquad (m < n)$$

Possiamo ancora riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p} + \frac{\alpha_2}{(s-p)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(s-p)^n}$$

dove:

$$\alpha_{n-k} = \frac{1}{k!}\lim_{s\to p}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}[(s-p)^n G(s)], \qquad k = 0,1,\ldots,n-1$$

infatti

$$(s-p_i)^n G(s) = \alpha_1(s-p)^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}(s-p)\alpha_n$$

Caso generale

Nel caso generale

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2}\cdots(s-p_k)^{m_n}} \qquad (m < m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$$

dove m_i é la molteplicitá della radice p_i. Possiamo ancora riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{\alpha_{jk}}{(s-p_j)^k}$$

dove:

$$\alpha_{jk} = \frac{1}{(m_j-k)!}\lim_{s\to p}\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}}_{m_j-k\ \text{VOLTE}}\left[(s-p_j)^{m_j}G(s)\right], \qquad k = 1,\ldots,m_j$$

Formula esplicita della soluzione

Avendo scritto $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s-p_j)^k}$$

formalmente l'inversa diventa consultando la tabella delle trasformate:

$$G(t) = \mathcal{L}\left\{G(s)\right\}^{-1}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(k-1)!} e^{p_j t} t^k$$

Il problema di questa espressione é che se p_j é un numero complesso il termine corrispondente é una funzione a valori complessi della quale non abbiamo definito la trasformata di Laplace.

Caso generale con radici complesse semplici (1/4)

Per ovviare al problema dei numeri complessi basta raccogliere le radici a due due in modo da avere a che fare solo con funzioni razionali semplici a coefficienti reali.

- Nel caso di radici complesse essendo il polinomio a coefficienti reali saranno a due accoppiate con la loro complessa coniugata.
- In tal caso per evitare coefficienti complessi nella espansione in fratti semplici si possono raccogliere le frazioni corrispondenti alle radici complesse coniugate
- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p} + \frac{\alpha_2}{s-\overline{p}}$$

Caso generale con radici complesse semplici (2/4)

- Per prima osserviamo che $\alpha_1 = \overline{\alpha_2}$:

$$\alpha_2 = \lim_{s\to\overline{p}} (s-\overline{p})G(s) = \overline{\lim_{\overline{s}\to p} (\overline{s}-p)G(\overline{s})} = \overline{\lim_{s\to p} (s-p)G(s)} = \overline{\alpha_1}$$

- Quindi ponendo $\alpha = \alpha_1$, $G(s)$ si riscrive come

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\alpha}{s-p} + \frac{\overline{\alpha}}{s-\overline{p}} = \frac{\alpha(s-\overline{p}) + \overline{\alpha}(s-p)}{(s-p)(s-\overline{p})} \\ &= \frac{s(\alpha+\overline{\alpha}) - p\overline{\alpha} - \overline{p}\alpha}{s^2 - s(p+\overline{p}) + p\overline{p}} \\ &= 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\, \frac{s - \mathrm{Re}(p\overline{\alpha}) / \mathrm{Re}(\alpha)}{s^2 - 2s\,\mathrm{Re}(p) + |p|^2} \end{aligned}$$

Caso generale con radici complesse semplici (3/4)

- Osserviamo inoltre che:

$$s^2 - 2s\,\mathrm{Re}(p) + |p|^2 = (s - \mathrm{Re}(p))^2 + \mathrm{Im}(p)^2$$

$$\frac{\mathrm{Re}(p\overline{\alpha})}{\mathrm{Re}(\alpha)} = \mathrm{Re}(p) + \frac{\mathrm{Im}(\alpha)\,\mathrm{Im}(p)}{\mathrm{Re}(\alpha)}$$

- cioé $G(s)$ si puó riscrivere come

$$\begin{aligned} G(s) &= 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\, \frac{s - \mathrm{Re}(p) - \mathrm{Im}(\alpha)\,\mathrm{Im}(p) / \mathrm{Re}(\alpha)}{(s - \mathrm{Re}(p))^2 + \mathrm{Im}(p)^2} \\ &= 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\, \frac{s - \mathrm{Re}(p)}{(s - \mathrm{Re}(p))^2 + \mathrm{Im}(p)^2} \\ &\quad - 2\,\mathrm{Im}(\alpha)\, \frac{\mathrm{Im}(p)}{(s - \mathrm{Re}(p))^2 + \mathrm{Im}(p)^2} \end{aligned}$$

Caso generale con radici complesse semplici (4/4)

- e quindi l'antitrasformata diventa analizzando la tabella delle trasformate standard

$$\begin{aligned} G(t) &= 2\,\mathrm{Re}\,(\alpha)\,e^{\mathrm{Re}(p)t}\cos \mathrm{Im}\,(p)\,t \\ &\quad - 2\,\mathrm{Im}\,(\alpha)\,e^{\mathrm{Re}(p)t}\sin \mathrm{Im}\,(p)\,t \end{aligned}$$

Caso generale con radici complesse multiple (1/5)

- Nel caso di radici complesse essendo il polinomio a coefficienti reali saranno a due accoppiate con la loro complessa coniugata.
- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate di molteplicitá m

$$G(s) = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\beta_i}{(s-\overline{p})^i}\right]$$

Caso generale con radici complesse multiple (2/5)

- Per prima osserviamo che $\alpha_i = \overline{\beta_i}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{m-i} &= \lim_{s\to\overline{p}} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}(s-\overline{p})^m G(s) \\ &= \overline{\lim_{\overline{s}\to p} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}(s-\overline{p})^m G(\overline{s})} \\ &= \overline{\lim_{\overline{s}\to p} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}(s-\overline{p})^m} = \overline{\beta_{m-i}} \end{aligned}$$

- Quindi $G(s)$ si riscrive come

$$G(s) = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(s-\overline{p})^i}\right]$$

Caso generale con radici complesse multiple (3/5)

- Osserviamo ora che

$$\frac{1}{(s-p)^{k+1}} = (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\frac{1}{s-p}$$

- Quindi $G(s)$ si riscrive come

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(s-\overline{p})^i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}s^{i-1}}\left[\frac{\alpha_i}{s-p} + \frac{\overline{\alpha_i}}{s-\overline{p}}\right] \end{aligned}$$

Caso generale con radici complesse multiple (4/5)

- Come nel caso della radice complessa coniugata "singola" possiamo scrivere

$$G(s) = 2\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Re}\,(\alpha_i)\,(-1)^{i-1}\frac{\mathsf{d}^{i-1}}{\mathsf{d}s^{i-1}}\left[\frac{s-\mathrm{Re}(p_i)}{(s-\mathrm{Re}(p_i))^2+\mathrm{Im}(p_i)^2}\right]$$

$$-\,2\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\,(\alpha_i)\,(-1)^{i-1}\frac{\mathsf{d}^{i-1}}{\mathsf{d}s^{i-1}}\left[\frac{\mathrm{Im}(p_i)}{(s-\mathrm{Re}(p_i))^2+\mathrm{Im}(p_i)^2}\right]$$

Caso generale con radici complesse multiple (5/5)

- ricordando la regola $\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}(s) = (-1)^n \frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}s^n}\widehat{f}(s)$ possiamo scrivere l'antitrasformata come:

$$G(t) = 2\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Re}\,(\alpha_i)\,t^{i-1}e^{\,\mathrm{Re}(p_i)t}\cos\,\mathrm{Im}\,(p_i)\,t$$

$$-\,2\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Im}\,(\alpha_i)\,t^{i-1}e^{\,\mathrm{Re}(p_i)t}\sin\,\mathrm{Im}\,(p_i)\,t$$