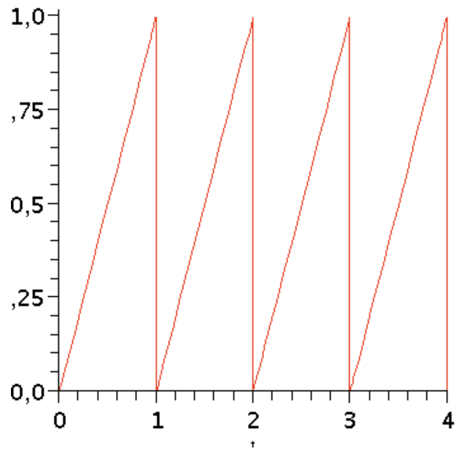
Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria

del 18 gennaio 2007

Cognome	Nome	Matricola

[Esercizio 1 - punti 5] Sia data la seguente funzione:

$$f(t) = t - [t]$$



dove [t] è la parte intera di t, ad esempio [24.345]=24.

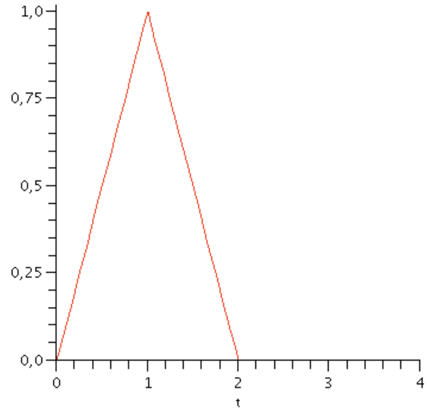
Usando le regole di trasformazione calcolare le trasformate di Laplace delle funzioni in tabella:

Funzione	Trasformata
$f(t)$	$s^{-2} - \dfrac{1}{(e^s - 1)\, s}$
$f(3\,t)$	$3\, s^{-2} - \dfrac{1}{(e^{1/3\, s} - 1)\, s}$
$f(t/3)\exp(-3\,t)$	$\dfrac{1}{3\,(s+3)^2} - \dfrac{1}{(e^{3\,s+9} - 1)\,(s+3)}$
$t\,f(t/2)$	$\dfrac{1}{s^3} - \dfrac{2}{s\,(e^s - e^{-s})^2} - \dfrac{1}{(e^{2\,s} - 1)\, s^2}$

[Esercizio 2 - punti 6] Sia data la seguente equazione differenziale:

$$y'(t) - y(t) = f(t)$$

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{per } 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{per } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{per } t \geq 2 \end{cases}$$



con dato iniziale $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Usando la trasformata Laplace calcolare la soluzione del problema.

Trasformata della equazione differenziale	$sy(s) - 1 - y(s) = \dfrac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$
Soluzione y(s) della equazione differenziale	$y(s) = \dfrac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s} + s^2}{s^2(s-1)}$
Soluzione y(x) della equazione differenziale	$2e^t - 1 - t$ $+2H(t-1)\left(t - e^{t-1}\right) - H(t-2)\left(t - 1 - e^{t-2}\right)$

[Esercizio 3 - punti 7] Usando la trasformata Laplace calcolare la soluzione del problema:

$$\begin{aligned} -2z'(t) - w'(t) &= t \\ -y'(t) + z'(t) - w'(t) &= 0 \\ -y'(t) - 2z'(t) &= 0 \end{aligned}$$

con dato iniziale $y(0) = 1$, $z(0) = 0$ e $w(0) = 1$.

Trasformata del sistema di equazioni differenziali	$-2\,sz\left(s\right)-sw\left(s\right)+1=s^{-2}$ $-sy\left(s\right)+2+sz\left(s\right)-sw\left(s\right)=0$ $-sy\left(s\right)+1-2\,sz\left(s\right)=0$
y(s), z(s),w(s) trasformata della soluzione	$y(s)=\frac{1}{5}\,\frac{2+5\,s^2}{s^3}$ $z(s)=-\frac{1}{5}\,s^{-3}$ $w(s)=\frac{1}{5}\,\frac{-3+5\,s^2}{s^3}$
y(x), z(x), w(x) soluzione del sistema di equazioni differenziali	$y(x)=\frac{x^2}{5}+1,\quad z(x)=-\frac{x^2}{10},\quad w(x)=1-\frac{3x^2}{10}$

[Esercizio 4 - punti 7] Usando la Z-trasformata calcolare la soluzione della seguente relazione di ricorrenza: $f_{n+3}-3\,f_{n+2}+3\,f_{n+1}-f_n=n$ con dato iniziale $f_0=0,\ f_1=0$ e $f_2=1$. (Suggerimento: $(z-1)^3=z^3-3z^2+3z+1$)

Z-trasformata della ricorrenza	$z^3f\left(z\right)-z-3\,z^2f\left(z\right)+3\,zf\left(z\right)-f\left(z\right)=\frac{z}{\left(z-1\right)^2}$
Soluzione f(z) della ricorrenza	$f\left(z\right)=\frac{z\left(2+z^2-2\,z\right)}{\left(z-1\right)^2\left(z^3-3\,z^2+3\,z-1\right)}$
Soluzione f_n della ricorrenza	$\frac{23}{24}\,k^2-\frac{3}{4}\,k-\frac{1}{4}\,k^3+\frac{1}{24}\,k^4$

[Esercizio 5 - punti 7] Minimizzare la seguente funzione: $f(x, y, z) = x\,z + y$ soggetta ai vincoli $h_1(x, y, z) = xy - z$ e $h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

Sistema non lineare da risolvere	$\begin{cases} z - \lambda\,y - 2\,\mu\,x = 0 \\ 1 - \lambda\,x - 2\,\mu\,y = 0 \\ x + \lambda - 2\,\mu\,z = 0 \\ -xy + z = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0 \end{cases}$
Soluzioni del sistema non lineare	soluzione 1 $\quad y = 1, \quad \mu = 1/2, \quad z = 0, \quad \lambda = 0, \quad x = 0$ soluzione 2 $\quad y = -1, \quad z = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = -1/2, \quad x = 0$
Classificazione dei punti stazionari	Per entrambi i punti l'hessiano proiettato nel kernel dei vincoli è identicamente nullo, quindi non si può dire se sono massimi o minimi locali

[Esercizio 6 - punti 12] Data la seguente funzione

$$f(x, y, z) = (x - 1)^2 + y\,z$$

e i seguenti vincoli

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2, \qquad x - y - z + 1 = 0$$

dire se i seguenti punti soddisfano le condizioni KKT del primo e secondo ordine necessarie e sufficienti. Classificare i punti. (λ è associato al vincolo di uguaglianza mentre μ è associato al vincolo di diseguaglianza).

x	y	z	λ	μ
$\frac{1}{4}$	$\frac{5-\sqrt{37}}{8}$	$\frac{5+\sqrt{37}}{8}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{5+\sqrt{37}}{8}$	$\frac{5-\sqrt{37}}{8}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\sqrt{10}-1}{3}$	$\frac{2\sqrt{10}+1}{6}$	$\frac{2\sqrt{10}+1}{6}$	$-\frac{5}{9}-\frac{2}{45}\sqrt{10}$	$-\frac{5}{9}+\frac{7}{30}\sqrt{10}$

Primo punto	vedi maple
Secondo Punto	vedi maple
Terzo Punto	vedi maple