Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 25 luglio 2007

Cognome	Nome	Matricola

[Esercizio 1 - punti 10] Sia dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{cases} y'(x) - z'(x) = \sin(x) \\ y'(x) + z'(x) = \cos(x) \end{cases} \quad \text{con dato iniziale} \quad y_0 = 1 \text{ e } z_0 = 0.$$

Usando la trasformata Laplace calcolare la soluzione del problema.

Trasformata della equazione differenziale	$\begin{cases} s\,y(s) - 1 - s\,z(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \\ s\,y(s) - 1 + s\,z(s) = \dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$
Soluzione y(s), z(s) nello spazio delle trasformate	$\begin{cases} \dfrac{s + 2\,s^2 + 3}{2s\,(s^2+1)} \\ \dfrac{s-1}{2s\,(s^2+1)} \end{cases}$
Soluzione y(x), z(x)	$\begin{cases} y(t) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{1}{2}\sin(x) \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{1}{2}\sin(x) \end{cases}$

[Esercizio 2 - punti 10] Usando la Z-trasformata calcolare la soluzione della seguente relazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} f\,(k+1) + g\,(k) + f\,(k) = 0 \\ g\,(k+1) - f\,(k+1) - g\,(k) + f\,(k) = 0 \end{cases}$$

con dato iniziale $f(0) = 1$ e $g(0) = 0$.

Z-trasformata della ricorrenza	$g\,(z) + (z+1)\,f\,(z) - z = 0$ $(z-1)\,g\,(z) + (1-z)\,f\,(z) + z = 0$

Soluzione f(z), g(z) della ricorrenza	$$f\left(z\right)=\frac{z^2}{z^2+z-2}$$ $$g\left(z\right)=\frac{-2\,z}{z^2+z-2}$$
Soluzione f(n), g(n) della ricorrenza	$$f\left(k\right)=\frac{2}{3}\,\left(-2\right)^{k}+\frac{1}{3}$$ $$g\left(k\right)=\frac{2}{3}\,\left(-2\right)^{k}-\frac{2}{3}$$

[Esercizio 3 - punti 10] Minimizzare la seguente funzione: $f(x,y)=xy+x+y^2$ soggetta al vincolo $h(x,y)=xy-1.$

Sistema non lineare da risolvere	$$\begin{cases} y+1-\lambda\,y=0 \\ x+2\,y-\lambda\,x=0 \\ -xy+1=0 \end{cases}$$
Soluzioni del sistema non lineare	$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{2} & \\ y=\dfrac{2^{2/3}}{2} & \left[=\dfrac{x^2}{2}\right] \\ \lambda=\sqrt[3]{2}+1 & [=x+1] \end{cases}$$
Classificazione dei punti stazionari	punto di minimo locale