# Serie di Fourier

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2006/2007

# Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

# Outline

# Funzioni periodiche

- Dato $T > 0$ si dice che $f(x)$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) è periodica di periodo $T$ se vale

$$f(t+T) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ovviamente poiché

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \cdots = f(t+nT) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$f(t)$ è anche periodica di periodo $kT$ per ogni $k > 0$ intero.

- Data una funzione $g(t)$ definita nell'intervallo $[a, b)$ possiamo estenderla ad una funzione periodica di periodo $b - a$ come segue

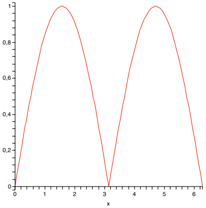
$$f(t) = g(t - n(b-a)), \qquad n(b-a) \le t < (n+1)(b-a)$$

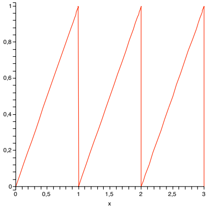
dove $n \in \mathbb{Z}$.

# Esempi di periodiche

- Le funzioni trigonometriche $\sin t$ e $\cos t$ sono ovviamente periodiche di periodo $2\pi$

$$\sin t = \sin(t + 2\pi), \qquad \cos t = \cos(t + 2\pi)$$

- $|\sin(t)| =$ 


$x - [x] =$ 

- Una famiglia di funzioni periodiche di periodo $2\pi$ è la seguente

$$S_N(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$$

- Le funzioni periodiche $\cos kt$ e $\sin kt$ e la funzione costante sono ortogonali rispetto al prodotto scalare di $L_2(0, 2\pi)$ cioè:

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \cos nt \, \mathrm{dt} = 0, \qquad n, m \geq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt \, \mathrm{dt} = 0, \qquad n, m \geq 1, \quad n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt \, \mathrm{dt} = 0, \qquad n, m \geq 1, \quad n \neq m$$

inoltre

$$\int_0^{2\pi} (\sin mt)^2 \, \mathrm{dt} = \int_0^{2\pi} (\cos mt)^2 \, \mathrm{dt} = \pi, \qquad n \geq 1.$$

- La verifica della ortogonalità può essere fatta facilmente usando le formule

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

- Se consideriamo le formule esponenziali per seno e coseno

$$\sin t = i\frac{e^{-it} - e^{it}}{2} \qquad \cos t = \frac{e^{-it} + e^{it}}{2}$$

la verifica è ancora più facile.

- Se consideriamo gli spazi vettoriali $V_N$

  $$V_N = \text{SPAN}\{1/\sqrt{2}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos Nt, \sin Nt\}$$

  allora $S_N(t) \in V_N$ e il vettore
- Quindi il vettore di $2N+1$ coordinate

  $$\left(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_N, b_N\right)^T$$

  determina univocamente $S_N(t)$
- C'è quindi una corrispondenza $1-1$ tra $V_N$ e lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2N+1}$
- La condizione di ortogonalità delle funzioni seno e coseno permette di stabilire che questa corrispondenza è una isometria.

- Definiamo il prodotto scalare su $V_N$ come segue:

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

- se consideriamo

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$$

$$g(t) = \frac{a_0'}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k' \cos kt + b_k' \sin kt\right)$$

otteniamo

$$(f,g) = a_0 a_0' + \sum_{k=1}^{n}(a_k a_k' + b_k b_k')$$

- Definiamo ora la mappa $\Phi : V_N \to \mathbb{R}^{2N+1}$ come segue: data $f(t)$

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$$

$\Phi(f) = \mathbf{f}$ dove

$$\mathbf{f} = \left(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_N, b_N\right)^T$$

- Ovviamente dato $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{2N})^T$

$$\Phi^{-1}(\mathbf{f})(t) = \frac{f_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N} \left(f_{2k-1} \cos kt + f_{2k} \sin kt\right)$$

- inoltre vale

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \Phi(f) \cdot \Phi(g) = (f, g)$$

dove $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \sum_{k=0}^{2N} f_k g_k$, cioè il prodotto scalare di $\mathbb{R}^{2N+1}$.

# A che ci serve tutto questo?

Il fatto che $V_N \equiv \mathbb{R}^{2N+1}$ ci permette di dire:

- Le funzioni $1/\sqrt{2}$, $\sin kt$, $\cos kt$ sono vettori di $V_N$ ortonormali
- Questi vettori costituiscono una base per $V_N$
- Consideriamo ora una generica funzione periodica $g(t)$ di periodo $2\pi$, allora potremmo considerare $g(t)$ appartenente ad uno spazio vettoriale $V$ che contiene $V_N$ (cioè $V_N \subset V$).
- Usando la othonormalità della base di $V_N$ è immediato costruire una proiezione ortogonale di $g(t)$ in $V_N$: Infatti usando il fatto che $(g - \pi g)(t)$ deve essere ortogonale a tutti i vettori della base di $V_N$ otteniamo:

$$(\pi g)(t) = \frac{(g, 1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{N} \left((g, \cos kt) \cos kt + (g, \sin kt) \sin kt\right)$$

- ovviamente se $g \in V_N$ abbiamo $g = \pi g$.

Se consideriamo lo spazio vettoriale $V_\infty$ definito da

$$f \in V_\infty, \qquad f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos kt + b_k \sin kt \right)$$

ci perdiamo la corrispondenza con lo spazio delle successioni dei numeri reali

$$\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k, \ldots\}$$

perché non tutte le successioni producono una serie convergente per ogni $t$.

- Le funzioni $1/\sqrt{2}$, $\sin kt$, $\cos kt$ sono vettori di $V_\infty$ ortonormali
- Questi vettori NON costituiscono una base per $V_\infty$
- Consideriamo ora una generica funzione periodica $g(t)$ di periodo $2\pi$. Usando il fatto che $(g - \pi g)(t)$ deve essere ortogonale a tutti i vettori di $V_\infty$ otteniamo:

$$(\pi g)(t) = \frac{(g, 1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( (g, \cos kt) \cos kt + (g, \sin kt) \sin kt \right)$$

Le considerazioni precedenti ci permettono di scrivere un gran numero di funzioni periodiche di periodo $2\pi$ come serie di funzioni

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

ci chiediamo ora:

- Quale classe di funzioni (periodiche) ammette tale rappresentazione come serie di seni e coseni?
- Quando è che questa serie ha senso?
- Le espressoni per i coefficienti $a_k$ e $b_k$ che abbiamo derivato nel caso della serie finita sono valide anche per la serie infinita?

# La serie di Fourier

- La serie di Fourier per una funzione periodica $f(t)$ di periodo $2\pi$ é la seguente

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$$

- dove

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, \mathrm{d}t, \qquad && k = 0, 1, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, \mathrm{d}t. \qquad && k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- Attenzione: abbiamo cambiato $1/\sqrt{2}$ con $1/2$ in modo che la formula per $a_0$ sia la stessa per $a_k$ (infatti $\cos(0t) = 1$). In questo modo la funzione costante è solo ortogonale alle altre.

# Quando converge la serie di Fourier ?

La serie di Fourier può convergere su tutto $[-\pi, \pi]$ o solo su un sottinsieme (anche vuoto). Quando converge non è detto che converga alla funzione di partenza. Esiste pero una classe di funzioni periodiche abbastanza ampia dove le cose vanno bene.

## Definizione (Funzioni continue a tratti)

*Una funzione $f(t)$ definita su $[a, b]$ è detta continua a tratti se:*

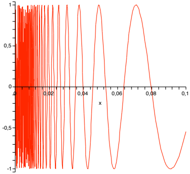
- $(i)$ *esiste una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tale che $f(t)$ è continua in ogni sotto intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2 \ldots, n$.*
- $(ii)$ *Per ogni intervallo $I_k$ i limiti $f(x_k - 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x_k - \epsilon)$ e $f(x_{k-1} + 0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x_{k-1} + \epsilon)$ esistono e sono finiti.*

Se $f(t)$ ha derivata prima e $f(t)$ con $f'(t)$ sono continue a tratti la serie di Fourier coverge alla funzione (tranne nei punti di discontinuità).

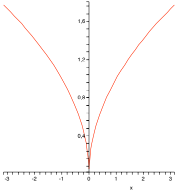
## Definizione (Funzioni regolari a tratti)

*Una funzione $f(t)$ definita su $[a,b]$ è detta regolare a tratti se esiste la derivata prima su $[a,b]$ escludendo al più un numero finito di punti. Inoltre $f(t)$ ed $f'(t)$ cono continue a tratti.*

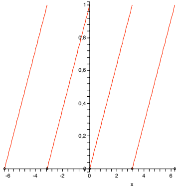
- La funzione $\sin(1/x)$ è continua su $(0,1]$ ma non continua a tratti su $[0,1]$ infatti $\lim_{\epsilon\to 0}\sin(1/x)$ non esiste.
- La funzione $f(t)=\sqrt{|t|}$ è continua a tratti ma non regolare a tratti, infatti in $\lim_{\pm\epsilon\to 0^+} f'(\epsilon)=\pm\infty$
- La funzione $f(t)=x/\pi-[x/\pi]$ è regolare a tratti.



$\sin(1/x)$



$\sqrt{|t|}$



$x/\pi-[x/\pi]$

## Teorema (Diseguaglianza di Bessel)

*Sia* $f \in L_2([-\pi,\pi])$ *(cioè a quadrato integrabile) e siano* $a_k$ *e* $b_k$ *i corrispondenti coefficienti di Fourier allora vale*

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

Questo teorema implica $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

## Dimostrazione (1/2).

Consideriamo $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$ usando le rezioni di ortogonalità

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(t))^2 \,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} S_N(t)^2 \,\mathrm{d}t - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_N(t) \,\mathrm{d}t$$

## Dimostrazione (2/2).

Dalle definizioni di $a_k$ e $b_k$ e usando le relazioni di ortogonalità

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_N(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

sostituendo nella prima uguaglianza

$$0 \le \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-S_N(t)\right)^2\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t - \left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]$$

e poi passando al limite per $N\to\infty$ otteniamo la tesi. $\square$

## Corollario (Il Lemma di Riemann–Lebesgue)

*Sia* $f \in L_2([-\pi, \pi])$ *(cioè a quadrato integrabile) allora vale*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, \mathrm{d}t = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, \mathrm{d}t = 0$$

*inoltre dalla formula* $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ *segue che vale*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt + \phi)\, \mathrm{d}t = 0$$

Questo corollario (lemma) è molto importante perché servirà a chiudere la dimostrazione della convergenza della serie di Fourier.

## Somme di Coseni (1/2)

Consideriamo ora la seguente funzione

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kt$$

moltiplicando $D_N(t)$ per $\sin\frac{t}{2}$ e usando la relazione $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ otteniamo

$$\begin{aligned} 2D_N(t)\sin\frac{t}{2} &= \sin\frac{t}{2} + 2\sum_{k=1}^{N} \cos kt \sin\frac{t}{2} \\ &= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{N} \big(\sin(kt + t/2) - \sin(kt - t/2)\big) \end{aligned}$$

molti termini si cancellano a vicenda così otteniamo:

$$D_N(t) = \frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

# Somme di Coseni (2/2)

Dalla relazione precedente otteniamo

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kt = \frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}$$

inoltre integrando su $[-\pi, \pi]$ otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2N+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 1$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere in maniera più diretta senza ricorrere al trucco di moltiplicare per $\sin\frac{t}{2}$ usando la formula esponenziale per il coseno:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

e la somma di una serie geometrica

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per dimostrare il seguente teorema:

**Teorema (Convergenza della serie di Fourier)**

*Sia $f(t)$ regolare a tratti su $[-\pi, \pi]$ allora la serie di Fourier $S_f(t)$ esiste e converge per ogni $t$ inoltre*

$$S_f(t) = \tilde{f}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) + f(x-\epsilon)}{2}$$

Questo vuole dire che nei punti in cui $f(t)$ è continua abbiamo $f(t) = \tilde{f}(t) = S_f(t)$ mentre nei punti di discontinuità la serie converge al punto medio del limite destro e sinistro della discontinuità.

# Convergenza della serie di Fourier (1/5)

Consideriamo $S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \big(a_k \cos kt + b_k \sin kt\big)$ allora possiamo scrivere usando le definizioni di $a_k$ e $b_k$ e $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$
\begin{aligned}
S_N(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \big(a_k \cos kt + b_k \sin kt\big) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\big(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt\big)\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N}\cos k(x-t)\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(x-t)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

# Convergenza della serie di Fourier (2/5)

Ponendo $z = x - t$ e sapendo che $f(t)$ e $D_N(t)$ sono periodiche

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+z) D_N(z)\,\mathrm{d}z$$

sfruttando il fatto che $D_N(z) = D_N(-z)$ possiamo porre $x = -z$

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_N(x)\,\mathrm{d}x$$

ed unendo le due espressioni

$$S_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+z)+f(t-z)}{2} D_N(z)\,\mathrm{d}z$$

# Convergenza della serie di Fourier (3/5)

Sfruttando il fatto che $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(z)\,\mathrm{d}z = 1$ $D_N(t)$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
S_N(t) - \tilde{f}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(t+z)+f(t-z)}{2} - \tilde{f}(t)\right) D_N(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(t+z)+f(t-z)}{2} - \tilde{f}(t)\right) \frac{\sin(2N+1)\frac{z}{2}}{2\sin\frac{z}{2}}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_t(z)\sin(2N+1)\frac{z}{2}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

dove

$$\Phi_t(z) = \frac{f(t+z)+f(t-z)-2\tilde{f}(t)}{4\sin\frac{z}{2}}$$

# Convergenza della serie di Fourier (4/5)

Nei punti $t$ dove la funzione è regolare e la derivata prima esiste ed è continua la funzione $\Phi_t(z)$ è regolare a tratti, infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\Phi_t(z) &= \lim_{z\to 0}\frac{f(t+z)+f(t-z)-2f(t)}{4\sin\frac{z}{2}} \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{(f(t+z)-f(t))+(f(t-z)-f(t))}{2z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{4\sin\frac{z}{2}} \\
&= \frac{f'(t)-f'(t)}{4}\cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

applicando il lemma di Riemann-Lebesgue a $\Phi_t(z)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} S_N(t) - f(t) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_t(z)\sin(2N+1)\frac{z}{2}\,\mathrm{d}z \\
&= 0
\end{aligned}$$

cioè $f(t) = S_f(t)$.

# Convergenza della serie di Fourier (5/5)

Nei punti $t$ dove la funzione è discontinua il ragionamento funziona ugualmente, infatti $2\tilde{f}(t) = f(t+0) + f(t-0)$ e quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \Phi_t(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{(f(t+z) - f(t+0)) + (f(t-z) - f(t-0))}{4\sin\frac{z}{2}} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(f(t+z) - f(t)) + (f(t-z) - f(t))}{2z} \lim_{z\to 0} \frac{z}{2\sin\frac{z}{2}} \\
&= \frac{f'(t+0) - f'(t-0)}{2}
\end{aligned}$$

applicando il lemma di Riemann-Lebesgue a $\Phi_t(z)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} S_N(t) - \tilde{f}(t) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_t(z) \sin(2N+1)\frac{z}{2}\, \mathrm{d}z \\
&= 0
\end{aligned}$$

cioè $\tilde{f}(t) = S_f(t)$.

## Teorema

*Fissiamo i coefficienti $a_k$ e $b_k$ e consideriamo la serie*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big( a_k \cos kt + b_k \sin kt \big)$$

*se la serie converge uniformemente allora $f(t)$ è continua e vale*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, \mathrm{d}t, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, \mathrm{d}t. \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Questo teorema ci assicura almeno nel caso di funzioni continue e serie uniformemente convergenti che i coefficienti $a_k$ e $b_k$ si calcolano con le formule precedentemente derivate.

- Se consideriamo una funzione $g(x)$ di periodo $2\ell$ allora la funzione $f(t) = g(t\ell/\pi)$ ha periodo $2\pi$, i coefficienti della serie di Fourier diventano quindi

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi)\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\,\mathrm{d}x \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi)\cos kt\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t\ell/\pi)\sin kt\,\mathrm{d}t &&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

- e la serie di Fourier corrispondente diventa

$$
S_g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)
$$

- Se consideriamo le formule esponenziali per seno e coseno

$$\sin(x) = i\frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2} \qquad \cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

- e le sostituiamo nella serie di Fourier otteniamo

$$\begin{aligned} S_g(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2} + b_k\frac{e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} - e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((a_k + ib_k)e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} + (a_k - ib_k)e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} \qquad c_k = \begin{cases} a_k + ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} - ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Dunque in generale una serie di Fourier ha una rappresentazione come serie biinfinita di exponenziali complessi

$$S_f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}} \qquad c_k = \begin{cases} a_k + ib_k & \text{se } k > 0 \\ a_0 & \text{se } k = 0 \\ a_{-k} - ib_{-k} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

- per $k0$ abbiamo

$$\begin{aligned} c_k = a_k + ib_k &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{\ell} + i\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- In modo analogo per $k < 0$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
c_k = a_{-k} - ib_{-k} &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\left(\cos\frac{-k\pi x}{\ell} - i\sin\frac{-k\pi x}{\ell}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\left(\cos\frac{k\pi x}{\ell} + i\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

- cioè abbiamo per $k = -\infty, \ldots, +\infty$

$$
c_k = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} g(x)e^{i\frac{k\pi x}{\ell}}\,\mathrm{d}x
$$

- La serie di Fourier per una funzione periodica $g(t)$ di periodo $2\ell$ é la seguente

$$S_g(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{k\pi t}{\ell}}$$

- dove

$$c_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} g(t) e^{i\frac{k\pi t}{\ell}}\,\mathrm{d}t, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Vogliamo ora calcolare le costanti $M_k$ e $\phi_k$ tali che

$$M_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right) = a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

- Consideriamo la seguente identità trigonometrica

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

scegliendo $\alpha = \frac{k\pi x}{\ell}$ e $\beta = \phi_k$ il problema diventa risolvere il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} M_k \cos\phi_k = a_k \\ M_k \sin\phi_k = b_k \end{cases} \qquad M_k^2 = a_k^2 + b_k^2, \quad \tan\phi_k = \frac{b_k}{a_k}$$

- e quindi abbiamo l'ugualianza

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \arctan\frac{b_k}{a_k}\right) = a_k \cos\frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

- Usando la precedente uguaglianza la serie di Fourier si può scrivere come

$$S_g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)$$

- dove

$$A_k = \frac{1}{2}\begin{cases} a_0 & \text{se } k = 0 \\ \sqrt{a_k^2 + b_k^2} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

$$\phi_k = \arctan\frac{b_k}{a_k}$$

- La precedente forma permette di interpretare in forma significativa i parametri $k$, $A_k$ e $\phi_k$.

$$S_g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)$$

- la funzione $S_g(x)$ è decomposta come somma numerabile di onde semplici dove:
    - $k$ corrisponde alla frequenza di periodo $\frac{kx}{2\ell}$;
    - $A_k$ corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
    - $\phi_k$ corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.

- Se consideriamo le formule esponenziali per il coseno

$$\cos(x) = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2}$$

- La precedente forma si può riscrivere come

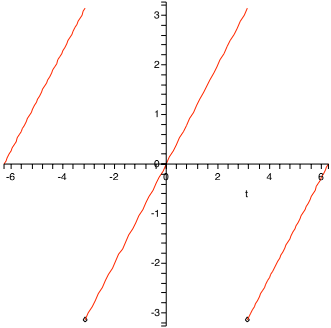
$$S_g(x) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[ e^{-i\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)} + e^{i\left(\frac{k\pi x}{\ell} - \phi_k\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\phi_k} e^{-i\frac{k\pi x}{\ell}}, \qquad \phi_{-k} = -\phi_k$$

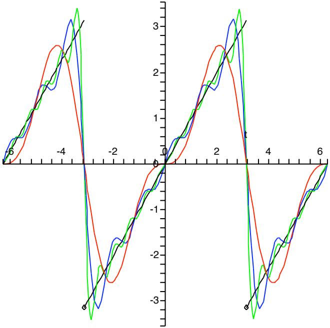
- Per cui si ottiene $c_k = A_k e^{i\phi_k}$
  - $k$ corrisponde alla frequenza di periodo $\frac{kx}{2\ell}$;
  - $|c_k|$ corrisponde alla ampiezza dell'onda corrispondente;
  - $\phi_k = \arctan(c_k)/(c_k)$ corrisponde alla fase (anticipo o ritardo) dell'onda corrispondente.

# Onda triangolare $f(t) = t \qquad t \in (-\pi, \pi)$

$$f(t) \approx 2\sin(t) - \sin(2t) + 2/3\sin(3t) - 1/2\sin(4t) + 2/5\sin(5t)$$
$$-1/3\sin(6t) + 2/7\sin(7t) - 1/4\sin(8t)$$



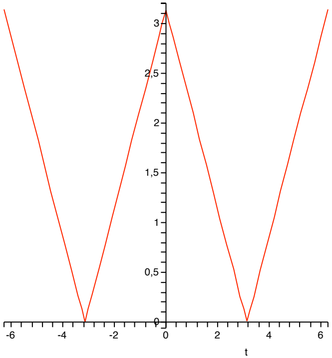

Funzione



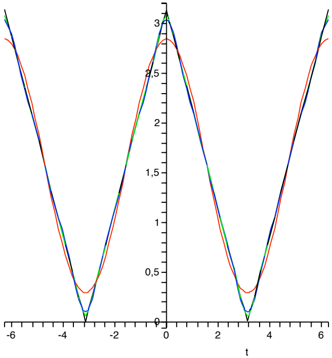

Serie di Fourier $N = 2, 5, 10$

# Onda triangolare bis $f(t) = \pi - |t|$ per $t \in [-\pi, \pi]$

$$f(t) \approx 1/2\,\pi + 4\,\frac{\cos(t)}{\pi} + 4/9\,\frac{\cos(3\,t)}{\pi} + \frac{4}{25}\,\frac{\cos(5\,t)}{\pi} + \frac{4}{49}\,\frac{\cos(7\,t)}{\pi}$$



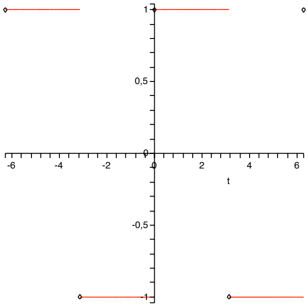

Funzione

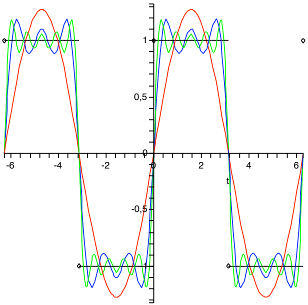



Serie di Fourier $N = 2, 5, 10$

# Onda quadra $f(t) = \begin{cases} +1 & t \in (-\pi, 0] \\ -1 & t \in (0, \pi] \end{cases}$

$$f(t) \approx 4\,\frac{\sin(t)}{\pi} + 4/3\,\frac{\sin(3\,t)}{\pi} + 4/5\,\frac{\sin(5\,t)}{\pi} + 4/7\,\frac{\sin(7\,t)}{\pi}$$



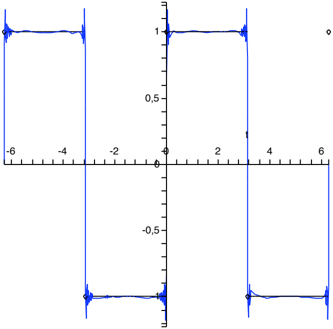




Funzione

Serie di Fourier $N = 2, 5, 10$

# Il fenomeno di Gibbs

Anche se la serie di Fourier converge puntualmente ad una funzione regolare a tratti, la convergenza non è uniforme. Per le serie di Fourier questo si manifesta in picchi di ampiezza finita (non infinitesima) per $N \to \infty$ che si muovono verso le discontinuità:




Serie di Fourier $N = 100$

# Il teorema del fenomeno di Gibbs

Consideriamo la funzione funzione periodica di periodo $2\pi$

$$f(t)|_{(0,2\pi)} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad x \in (0, 2\pi)$$

Questa è una funzione regolare a tratti e per il teorema di convergenza avremo che la sua serie di Fourier

$$S_f(t) = \lim_{N \to 'infty} S_N(t), \qquad S_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin kt}{k}$$

converge puntualmente in $(0, 2\pi)$. Se consideriamo la successione $t_n = \frac{2\pi}{2n+1}$, avremo che questa successione ha la proprietà:

$$\lim_{n \to \infty} S_n(t_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} 1.1789797\ldots$$

poiché $|f(t)| \leq \pi/2$ per ogni $t$ questo significa che la serie di Fourier produce un overshooting del $17\%$ che non si attenua per $N \to \infty$.

## Teorema (Il teorema del fenomeno di Gibbs)

*Consideriamo la serie*

$$S_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin kt}{k}$$

*e la successione* $t_n = \frac{2\pi}{2n+1}$. *Allora avremo*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} 1.1789797\ldots$$

## Dimostrazione. (1/5).

poiché $(\sin kt/k)' = \cos kt$ avremo

$$S_n(t) = -\int_t^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos kz\,\mathrm{d}z = \int_t^{\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}z - \int_t^{\pi} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kz\,\mathrm{d}z$$

(2/5).

ricordando che $D_n(t)$ e che $D_n(t) = D_n(-t)$ e $\int_0^\pi D_n(t)\,\mathrm{d}t = \pi/2$

$$
\begin{aligned}
S_n(t) &= \frac{\pi - t}{2} - \int_t^\pi D_n(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi - t}{2} - \int_0^\pi D_n(z)\,\mathrm{d}z + \int_0^t D_n(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{-t}{2} + \int_0^t D_n(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{-t}{2} + \frac{t}{\pi}\int_0^\pi D_n(tx/\pi)\,\mathrm{d}x \quad [tx = \pi z] \\
&= \frac{-t}{2} + \frac{t}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{tx}{2\pi}}{2\sin\frac{tx}{2\pi}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

(3/5).

sostituendo $t_n = \frac{2\pi}{2n+1}$

$$
\begin{aligned}
S_n(t_n) &= \frac{\pi}{2n+1} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2n+1} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\frac{x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2n+1} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} Q_n(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

dove

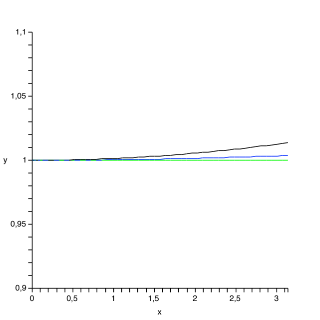
$$
Q_n(x) = \frac{x}{(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}}
$$

□

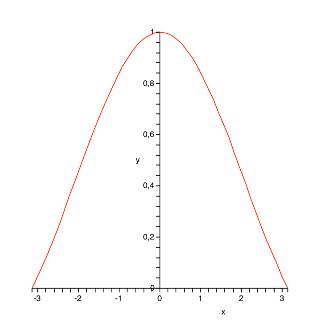
(4/5).

osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} Q_n(x) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n(x) = 1,$$




$Q_n(x)$ per $n = 5, 10, 100$




$\sin x/x$

(5/5).

e quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n+1} + \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} Q_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \lim_{n\to\infty} Q_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} 1.178979744\ldots
\end{aligned}$$

$\square$