La trasformata di Laplace

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2006/2007

Outline

La trasformata di Laplace

- Definizione

$$f(t) \to \widehat{f}(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

$$\widehat{f}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0^+}\lim_{M\to+\infty}\int_{-\epsilon}^{M} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

- Utilità: trasforma

Equazioni differenziali $\Rightarrow$ Equazioni algebriche

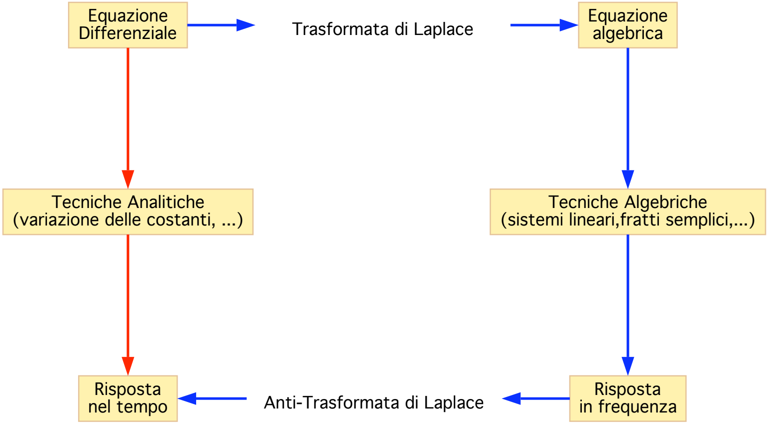
- Analogia con il logaritmo:

$$a \to \log a$$

$$a \cdot b \to \log a + \log b$$

cioè il logaritmo trasforma i prodotti in somme che sono più facili da maneggiare.

Uso della trasformata di Laplace per risolvere ODE



Proprietà della Trasformata

- Linearità

$$\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\}(s) = a\widehat{f}(s)+b\widehat{g}(s)$$

- Traslazione

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}(s) = \widehat{f}(s-a)$$

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)\right\}(s) = e^{-as}\widehat{f}(s)$$

- Cambio di scala

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}(s) = \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

Linearità e Cambio di scala

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} (af(t)+bg(t))e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= a\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + b\int_{0^-}^{+\infty} g(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= a\widehat{f}(s) + b\widehat{g}(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left\{f(at)\right\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(at)e^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad [t = z/a] \\
&= \int_{0^-}^{+\infty} f(z)e^{-sz/a}\,\frac{\mathrm{d}z}{a} \\
&= \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}$$

Traslazione

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{(a-s)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \widehat{f}(s-a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t-a)\right\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} f(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}z & [t-a=z] \\ &= \int_{-z}^{+\infty} f(z)e^{-s(z+a)}\,\mathrm{d}z & [f(z)=0 \text{ per } z\leq 0] \\ &= e^{-sa}\int_{0}^{+\infty} f(z)e^{-sz}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Trasformata della funzione di Heaviside $u(t)$

- Definizione della funzione di Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{Re}\,(s) > 0$):

$$\mathcal{L}\left\{u\right\}(s) = \widehat{u}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_{0^-}^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

Trasformata della crescita lineare $(t)_+$

- Definizione della funzione di crescita lineare

$$(t)_+ = t\,u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{Re}\,(s) > 0$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{(t)_+\right\}(s) = \widehat{(t)_+}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} t\,u(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} t e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{t}{s} e^{-st}\right]_{0^-}^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_{0^-}^{+\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_{0^-}^{+\infty} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Trasformata della crescita polinomiale $t^k u(t)$

- Definizione della funzione di crescita polinomale

$$(t)_+^k = t^k\, u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ t^k & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{Re}\,(s) > 0$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{(t)_+^k\right\}(s) = \widehat{(t)_+^k}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} t^k\, u(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} t^k e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{t^k}{s}e^{-st}\right]_{0^-}^{+\infty} + \frac{k}{s}\int_{0^-}^{+\infty} t^{k-1} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{k}{s}\mathcal{L}\left\{(t)_+^{k-1}\right\}(s)\end{aligned}$$

- Usando l'induzione e tenendo conto che $\widehat{(t)_+}(s) = \dfrac{1}{s^2}$ si ha

$$\widehat{(t)_+^k}(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

Trasformata della crescita esponenziale $a^{b\,t}u(t)$

- Definizione della funzione di crescita esponenziale

$$v(t) = a^{bt}\,u(t) \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ a^{bt} & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

- Trasformata (assumendo $\mathrm{Re}\,(s) > b\log a$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{a^{bt}\right\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} a^{bt}\,u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} a^{bt}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{bt\log a}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{+\infty} e^{(b\log a-s)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{(b\log a - s)}e^{(b\log a-s)t}\right]_{0^-}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s - b\log a} \end{aligned}$$

Funzioni trasformabili (1/2)

- Non tutte le funzioni sono trasformabili, ad esempio

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{e^{t^2}\right\}(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{t^2-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0^-}^{T} e^{(t-s)t}\,\mathrm{d}t + \int_{T}^{+\infty} e^{(t-s)t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

per ogni valore di s scegliendo $T > \mathrm{Re}(s)$ si ha che $\int_T^{+\infty} e^{(t-s)t}\,\mathrm{d}t$ non è convergente e quindi la funzione non è trasformabile per nessun valore di s.

Funzioni trasformabili (2/2)

Se $f(t)$ è generalmente continua con limite di crescita: $|f(t)| \leq Me^{Nt}$ per $t \geq T$ allora è Laplace-trasformabile:

$$\mathcal{L}\left\{f\right\}(s) = \int_{0^-}^{T} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_{T}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Infatti

$$\left|\int_{T}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{T}^{+\infty} \left|f(t)e^{-st}\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_{T}^{+\infty} Me^{Nt}\left|e^{-st}\right|\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{T}^{+\infty} Me^{Nt}e^{-\operatorname{Re}(s)t}\,\mathrm{d}t = M\int_{T}^{+\infty} e^{(N-\operatorname{Re}(s))t}\,\mathrm{d}t$$

ed per $\operatorname{Re}(s) > N$ si ha che

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{T}^{+\infty} e^{(N-\operatorname{Re}(s))t}\,\mathrm{d}t = 0$$

trasformazione della derivata prima (1/2)

Teorema (Laplace trasformata della derivata prima)

Sia $f \in \mathtt{C}^1(0, +\infty)$, *ed esista il limite* $f(0^+) = \lim_{\beta \downarrow 0} f(\beta)$ *finito. Allora la trasformata della derivata prima diventa:*

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = s\widehat{f}(s) - f(0^+)$$

(assumiamo che $f(t) = 0$ *per* $t \leq 0$*)*

Derivazione: Sia $\operatorname{Re}(s) > 0$ e $\beta > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\beta}^{+\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)e^{-st}\right]_{\beta}^{+\infty} + s\int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= -f(\beta)e^{-s\beta} + s\int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

trasformazione delle derivata prima (2/2)

da cui abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{+\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \lim_{\beta\to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{0} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_{\beta}^{+\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \lim_{\beta\to 0}\left[-f(\beta)e^{-s\beta} + s\int_{\beta}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + 0\right] \\ &= -f(0^+) + s\int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

poiché $f(t)=0$ per $t\leq 0$ abbiamo $\int_{-\epsilon}^{0} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = 0$ e quindi

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = -f(0^+) + s\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

trasformazione della derivata k-esima

Teorema (Laplace trasformata della derivata k-esima)

Sia $f \in \mathrm{C}^k(0,+\infty)$*, ed esista il limite* $f^{(j)}(0^+) = \lim_{\beta \downarrow 0} f^{(j)}(\beta)$ *finito per* $j = 0, 1, \ldots, n-1$*. Allora la trasformata della derivata* k*-esima diventa:*

$$\mathcal{L}\left\{ f^{(k)}(t) \right\}(s) = s^k \widehat{f}(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i-1)}(0^+).$$

(assumiamo che $f(t) = 0$ *per* $t \leq 0$*)*

Derivazione: La derivazione è del tutto analoga alla derivazione per la derivata prima applicando k volte l'integrazione per parti.

trasformazione dell'integrale

Teorema (Laplace trasformata dell integrale)

Sia $f(t)$ *regolare a tratti, e* $g(t)$ *definita come segue*

$$g(t) = \int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$$

la trasformata $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s) = \widehat{g}(s)$ *diventa:*

$$\widehat{g}(s) = \frac{1}{s}\widehat{f}(s).$$

Derivazione: Basta applicare la regola di derivazione per la funzione $g(t)$ e osservare che $g'(t) = f(t)$ e $g(0) = 0$.

Valori iniziali e finali

Teorema (Teorema del valore iniziale)

$$\lim_{t \downarrow 0} f(t) = \lim_{s \to +\infty} s\widehat{f}(s) \qquad s \in \mathbb{R}$$

Teorema (Teorema del valore finale)

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\widehat{f}(s) \qquad s \in \mathbb{R}$$

- Moltiplicazione per t^n

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}(s) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} \widehat{f}(s)$$

- Divisione per t. Sia $g(t) = t f(t)$ allora per la formula precedente

$$\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$$

che può essere scritto come: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\}(s) = -\widehat{g}(s)$ o meglio

$$\mathcal{L}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\}(s) = -\int \widehat{g}(s)\,\mathrm{d}s + C = \widehat{h}(s)$$

La costante complessa C va scelta in modo che $\widehat{h}(s)$ soddisfi i teoremi del valore iniziale e finale. Ovviamente $\lim_{t\downarrow 0} g(t)/t$ deve esistere ed essere finito.

Teorema (Traformazione di funzioni periodiche)

Sia $f(t+T) = f(t)$ *per* $t > 0$ *allora vale*

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t}{1-e^{-sT}}$$

Teorema (Traformazione del prodotto di convoluzione)

Sia $(f \star g)(t)$ *definita come segue:*

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(z)g(t-z)\,\mathrm{d}z$$

allora vale

$$\mathcal{L}\left\{f \star g\right\}(s) = \widehat{f}(s)\,\widehat{g}(s)$$

Tabella delle trasformate

Funzione	Trasformata	Funzione	Trasformata
1	$\frac{1}{s}$	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{\alpha t}-e^{\beta t}$	$\frac{\alpha-\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	$e^{at}\cosh\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$
$e^{\alpha t}f(t)$	$\widehat{f}(s-\alpha)$	$e^{at}\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
$f(t-\alpha)$	$e^{-\alpha s}\widehat{f}(s)$	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\widehat{f}(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$	$s\widehat{f}(s)-f(0^+)$
$\int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$	$\frac{1}{s}\widehat{f}(s)$	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)$	$s^n\widehat{f}(s)-\sum_{j=0}^{n-1}s^{n-j-1}f^{(j)}(0^+)$

Attenzione, le funzioni a sinistra delle trasformate devono intendersi uguali a 0 per $t<0$, cioè $f(t) \rightarrow \widehat{f}(s)$ in realtà è $u(t)f(t) \rightarrow \widehat{f}(s)$ dove $u(t)$ è la funzione di Heaviside.

Forma standard della trasformata di Laplace (1/2)

- Nelle applicazioni elettriche o meccaniche la trasformata di Laplace si può normalmente scrivere nella forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2}\cdots(s-p_n)^{m_n}}$$

  dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$.

- Possiamo sempre assumere che $\partial P(s) < \partial Q(s)$ in caso contrario usando la divisione di polinomi con resto:

$$P(s) = Q(s)A(s) + B(s) \qquad \partial B(s) < \partial Q(s)$$

  e quindi

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = A(s) + \frac{B(s)}{Q(s)}$$

Forma standard della trasformata di Laplace (2/2)

- La antitrasformata di un polinomio

$$A(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n$$

formalmente è la seguente

$$\mathfrak{L}\left\{A(s)\right\}^{-1}(t) = a_0\delta(t) + a_1\delta^{(1)}(t) + \cdots + a_n\delta^{(n)}(t)$$

- Le "funzioni" $\delta^{(k)}(t)$ sono le derivate k-esime nel senso delle distribuzioni della delta di Dirac ed hanno la proprietà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

- A parte l'impulso unitario ($\delta(t)$) normalmente le derivate dell'impulso non si trovano nelle applicazioni considerate.
- Possiamo quindi considerare unicamente l'antitrasformata della funzione razionale $P(s)/Q(s)$ con $\partial P(s) < \partial Q(s)$.

Caso radici semplici

Data la funzione razionale nella variabile complessa s;

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \qquad (m < n)$$

dove $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$. Possiamo riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \frac{\alpha_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s-p_n}$$

dove:

$$\alpha_i = \lim_{s \to p_i} (s-p_i)G(s)$$

infatti

$$(s-p_i)G(s) = \alpha_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \frac{s-p_i}{s-p_j}$$

Caso radici multiple

Nel caso di radici multiple ad esempio nel caso di una singola radice p di molteplicità n

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p)^n} \qquad (m < n)$$

Possiamo ancora riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p} + \frac{\alpha_2}{(s-p)^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(s-p)^n}$$

dove $(0! = 1)$:

$$\alpha_{n-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \to p} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} [(s-p)^n G(s)], \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

infatti

$$(s-p_i)^n G(s) = \alpha_1 (s-p)^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}(s-p) + \alpha_n$$

Caso generale

Nel caso generale

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{(s-p_1)^{m_1}(s-p_2)^{m_2}\cdots(s-p_k)^{m_n}} \qquad (m < m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$$

dove m_i è la molteplicità della radice p_i. Possiamo ancora riscrivere $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s-p_j)^k}$$

dove $(0! = 1)$:

$$\alpha_{j,m_j-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \to p} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \left[(s-p_j)^{m_j} G(s) \right], \qquad k = 0, 1, \ldots, m_j - 1$$

Formula esplicita della soluzione

Avendo scritto $G(s)$ come somma di fratti semplici come segue

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(s - p_j)^k}$$

formalmente l'inversa diventa consultando la tabella delle trasformate:

$$G(t) = \mathfrak{L}\left\{G(s)\right\}^{-1}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{jk}}{(k-1)!} e^{p_j t} t^{k-1}$$

Il problema di questa espressione è che se p_j è un numero complesso il termine corrispondente è una funzione a valori complessi della quale non abbiamo definito la trasformata di Laplace.

Caso generale con radici complesse semplici (1/3)

Per ovviare al problema dei numeri complessi basta raccogliere le radici complesse conjugate a due due in modo da avere a che fare solo con funzioni razionali semplici a coefficienti reali.

- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate

$$G(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_1}{s-p} + \frac{\alpha_2}{s-\overline{p}}\right]$$

- Il fattore $\frac{1}{2}$ è stato messo per uniformare il caso di radice reale semplice con il caso di due radici complesse coniugate

Caso generale con radici complesse semplici (2/3)

- Per prima osserviamo che $\alpha_1 = \overline{\alpha_2}$:

$$\alpha_2 = \lim_{s\to\overline{p}} (s-\overline{p})G(s) = \overline{\lim_{\overline{s}\to p} (\overline{s}-p)G(\overline{s})} = \overline{\lim_{s\to p} (s-p)G(s)} = \overline{\alpha_1}$$

- Quindi ponendo $\alpha = \alpha_1$, $G(s)$ si riscrive come

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{2}\frac{\alpha}{s-p} + \frac{1}{2}\frac{\overline{\alpha}}{s-\overline{p}} = \frac{1}{2}\frac{\alpha(s-\overline{p})+\overline{\alpha}(s-p)}{(s-p)(s-\overline{p})} \\ &= \frac{1}{2}\frac{s(\alpha+\overline{\alpha})-p\overline{\alpha}-\overline{p}\alpha}{s^2-s(p+\overline{p})+p\overline{p}} \\ &= \frac{s\,\mathrm{Re}\,(\alpha)-\ \mathrm{Re}\,(p\overline{\alpha})}{s^2-2s\,\mathrm{Re}\,(p)+|p|^2} \end{aligned}$$

Caso generale con radici complesse semplici (3/3)

- Osserviamo inoltre che:

$$s^2 - 2s\,\mathrm{Re}\,(p) + |p|^2 = (s - \mathrm{Re}\,(p))^2 + \mathrm{Im}\,(p)^2$$

$$\mathrm{Re}\,(p\overline{\alpha}) = \mathrm{Re}\,(p)\,\mathrm{Re}\,(\alpha) + \mathrm{Im}\,(\alpha)\,\mathrm{Im}\,(p)$$

- inoltre ponendo $a = \mathrm{Re}\,(\alpha)$ e $b = -\mathrm{Im}\,(\alpha)$, $G(s)$ si può riscrivere come

$$G(s) = a\frac{s - \mathrm{Re}\,(p)}{(s - \mathrm{Re}\,(p))^2 + \mathrm{Im}\,(p)^2} + b\frac{\mathrm{Im}\,(p)}{(s - \mathrm{Re}\,(p))^2 + \mathrm{Im}\,(p)^2}$$

- e quindi l'antitrasformata diventa analizzando la tabella delle trasformate standard

$$G(t) = e^{\mathrm{Re}(p)t}\,(a\cos \mathrm{Im}\,(p)\,t + b\sin \mathrm{Im}\,(p)\,t)$$

CONCLUSIONI: Caso con radici complesse semplici

- Nel caso il denominatore di $G(s)$ contenga due radici semplici complesse coniugate p e $\overline{p}$, cioè

$$G(s) = \frac{P(s)}{(s-p)(s-\overline{p})}$$

- Allora $G(s)$ si può riscrivere come

$$G(s) = a\frac{s - \mathrm{Re}\,(p)}{(s - \mathrm{Re}\,(p))^2 + \mathrm{Im}\,(p)^2} + b\frac{\mathrm{Im}\,(p)}{(s - \mathrm{Re}\,(p))^2 + \mathrm{Im}\,(p)^2}$$

- e quindi l'antitrasformata diventa analizzando la tabella delle trasformate standard

$$G(t) = e^{\mathrm{Re}(p)t}\left(a\cos \mathrm{Im}\,(p)\,t + b\sin \mathrm{Im}\,(p)\,t\right)$$

Caso generale con radici complesse multiple (1/4)

- Nel caso di radici complesse essendo il polinomio a coefficienti reali saranno a due accoppiate con la loro complessa coniugata.
- Per semplificare l'esposizione consideriamo il caso di due sole radici complesse coniugate di molteplicità m

$$G(s) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\beta_i}{(s-\overline{p})^i}\right]$$

Caso generale con radici complesse multiple (2/4)

- Per prima osserviamo che $\alpha_i = \overline{\beta_i}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{m-i} &= \lim_{s\to\overline{p}} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}(s-\overline{p})^m G(s)\\ &= \overline{\lim_{\overline{s}\to p} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}(\overline{s}-p)^m G(\overline{s})}\\ &= \overline{\lim_{s\to p} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}(s-p)^m G(s)} = \overline{\beta_{m-i}}\end{aligned}$$

- Quindi $G(s)$ si riscrive come

$$G(s) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(s-\overline{p})^i}\right]$$

Caso generale con radici complesse multiple (3/4)

- Osserviamo ora che

$$\frac{1}{(s-p)^{k+1}} = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\frac{1}{s-p}$$

- Quindi $G(s)$ si riscrive come

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\alpha_i}{(s-p)^i} + \frac{\overline{\alpha_i}}{(s-\overline{p})^i}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^i}{i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{i+1}}{s-p} + \frac{\overline{\alpha_{i+1}}}{s-\overline{p}}\right)\right] \end{aligned}$$

Caso generale con radici complesse multiple (4/4)

- Come nel caso della radice complessa coniugata “singola” possiamo scrivere

$$G(s)=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}\left[a_i\frac{s-\mathrm{Re}(p)}{(s-\mathrm{Re}(p))^2+\mathrm{Im}(p)^2}+b_i\frac{\mathrm{Im}(p)}{(\mathrm{Re}(p)-s)^2+\mathrm{Im}(p)^2}\right]$$

- dove

$$a_i=\mathrm{Re}\left(\alpha_{i+1}\right),\qquad b_i=-\mathrm{Im}\left(\alpha_{i+1}\right).$$

- Ricordando la regola $\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}(s)=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\widehat{f}(s)$ possiamo scrivere l’antitrasformata come:

$$G(t)=\sum_{i=0}^{m-1}t^i e^{\mathrm{Re}(p)t}\left[a_i\cos\mathrm{Im}\left(p\right)t+b_i\sin\mathrm{Im}\left(p\right)t\right]$$

Caso generale: Conclusioni (1/2)

- In generale se $G(s) = P(s)/Q(s)$ con $\partial P(s) \leq \partial Q(s)$ e $Q(s)$ che ha n radici distinte p_k di molteplicità m_k (le coppie di radici complesse conjugate si contano 1) scriverà come:

$$G(s) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_{ki}}{(s - p_k)^i} + \frac{\overline{\alpha}_{ki}}{(s - \overline{p}_k)^i} \right]$$

- Usando le considerazioni dei lucidi precedenti e ponendo $r_k = \mathrm{Re}\,(p_k)$ e $\omega_k = \mathrm{Im}\,(p_k)$ otteniamo

$$G(s) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m_k - 1} (-1)^i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i} \left[a_{ki} \frac{s - r_k}{(s - r_k)^2 + \omega_k^2} + b_{ki} \frac{\omega_k}{(r_k - s)^2 + \omega_k^2} \right]$$

dove $a_{ki} = \mathrm{Re}\,(\alpha_{ki+1})$ e $b_{ki} = -\,\mathrm{Im}\,(\alpha_{ki+1})$.

Caso generale: Conclusioni (2/2)

- Applicando l'antitrasformata otteniamo

$$G(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{r_k t} \left[A_k(t) \cos \omega_k t + B_k(t) \sin \omega_k t\right]$$

- dove

$$A_k(t) = \sum_{i=0}^{m_k-1} a_{ki} t^i, \qquad B_k(t) = \sum_{i=0}^{m_k-1} b_{ki} t^i$$

- Notate che se $\mathrm{Im}\,(p_k) = \omega_k = 0$ allora riotteniamo il caso delle radici multiple reali.

Calcolo pratico dei coefficienti α_{ki} (1/2)

Dalle considerazioni precedenti data $G(s) = P(s)/Q(s)$, la sua espansione in fratti semplici prende la forma

$$G(s) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha_{ki}}{(s - p_k)^i} + \frac{\overline{\alpha}_{ki}}{(s - \overline{p}_k)^i} \right]$$

dove:

$$\alpha_{j,m_j-i} = \frac{1}{i!} \lim_{s \to p} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i} \left[(s - p_j)^{m_j} G(s) \right], \qquad i = 0, 1, \ldots, m_j - 1$$

pur essendo questa espansione perfettamente lecita può essere onerosa da calcolare. Si possono fare meno conti facendo alcune considerazioni.

Calcolo pratico dei coefficienti α_{ki} (2/2)

Moltiplicando l'espansione precedente per $Q(s)$ otteniamo una uguaglianza tra polinomi

$$P(s) = Q(s)G(s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_k} \frac{Q(s)}{2}\left[\frac{\alpha_{ki}}{(s-p_k)^i} + \frac{\overline{\alpha}_{ki}}{(s-\overline{p}_k)^i}\right]$$

I coefficienti α_{km_k} si ottengono immediatamente dalla relazione

$$P(p_k) = Q(p_k)G(p_k)$$

gli altri coefficienti si ottengono tramite derivazione e usando i risultati precedenti

$$\alpha_{j,m_k-j} := \text{risolve per } \alpha_{j,m_k-j} \qquad \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}s^j}P(s)\Big|_{s=p_k} = 0$$

per capire come funziona conviene fare un semplice esempio

Esempio Pratico molto complesso (1/11)

Vogliamo trovare l'espansione in fratti semplici del seguente polinomio razionale

$$\frac{s^2+s+1}{(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2}$$

le radici sono ovviamente $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1+i$ con molteplicità $m_1 = 1$, $m_2 = 3$ ed $m_3 = 2$. L'espansione in fratti semplici prende la forma (i fattori $1/2$ li metto sono alla fine)

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{a}{s-1} + \frac{b_1}{s-3} + \frac{b_2}{(s-3)^2} + \frac{b_3}{(s-3)^3} \\ &+ \frac{c_1+id_1}{s-(1+i)} + \frac{c_1-id_1}{s-(1-i)} \\ &+ \frac{c_2+id_2}{(s-(1+i))^2} + \frac{c_2-id_2}{(s-(1-i))^2} \end{aligned}$$

Esempio Pratico molto complesso (2/11)

Calcoliamo ora

$$
\begin{aligned}
P(s)G(s) = {} & a(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
& + b_1(s-1)(s-3)^2(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
& + b_2(s-1)(s-3)(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
& + b_3(s-1)(s-(1+i))^2(s-(1-i))^2 \\
& + (c_1+id_1)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))(s-(1-i))^2 \\
& + (c_1-id_1)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2(s-(1-i)) \\
& + (c_2+id_2)(s-1)(s-3)^3(s-(1-i))^2 \\
& + (c_2-id_2)(s-1)(s-3)^3(s-(1+i))^2
\end{aligned}
$$

Esempio Pratico molto complesso (3/11)

Espandendo i polinomi

$$Q(s)G(s) = \big(a + b_1 + 2\,c_1\big)\,s^7$$

$$+\,(2\,c_2 - 11\,b_1 + b_2 - 13\,a - 26\,c_1 - 2\,d_1)\,s^6$$

$$+\,(-24\,c_2 - 8\,b_2 + b_3 - 4\,d_2 + 51\,b_1 + 71\,a + 24\,d_1 + 140\,c_1)\,s^5$$

$$+\,(-116\,d_1 - 215\,a - 133\,b_1 - 408\,c_1 + 27\,b_2 - 5\,b_3 + 44\,d_2 + 112\,c_2)\,s^4$$

$$+\,(12\,b_3 + 706\,c_1 + 400\,a - 52\,b_2 + 292\,d_1 + 216\,b_1 - 184\,d_2 - 252\,c_2)\,s^3$$

$$+\,(60\,b_2 - 738\,c_1 - 16\,b_3 - 468\,a + 270\,c_2 - 220\,b_1 - 414\,d_1 + 360\,d_2)\,s^2$$

$$+\,(324\,a + 12\,b_3 + 132\,b_1 - 108\,c_2 - 40\,b_2 + 432\,c_1 - 324\,d_2 + 324\,d_1)\,s$$

$$-108\,a - 36\,b_1 + 12\,b_2 - 4\,b_3 - 108\,c_1 - 108\,d_1 + 108\,d_2$$

Notate che è un polinomio a coefficienti reali in s.

Esempio Pratico molto complesso (4/11)

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 1$ (la prima radice)

$$Q(1)G(1) = -8a, \qquad P(1) = 3, \qquad a = -\frac{3}{8}$$

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 3$ (la seconda radice)

$$Q(3)G(3) = 50b_3, \qquad P(3) = 13, \qquad b_3 = \frac{13}{50}$$

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 1 + i$ (la terza radice)

$$Q(1+i)G(1+i) = 44c_2 - 8d_2 + i(8c_2 + 44d_2), \quad P(1+i) = 2 + 3i,$$

da cui otteniamo il sistema

$$44c_2 - 8d_2 = 2, \qquad 8c_2 + 44d_2 = 3.$$

che risolto da come risultato $c_2 = 7/125$ e $d_2 = 29/500$.

Esempio Pratico molto complesso (5/11)

Calcoliamo ora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(Q(s)G(s)) = 7\ (a + b_1 + 2\,c_1)\,s^6$$

$$+6\ (2\,c_2 - 11\,b_1 + b_2 - 13\,a - 26\,c_1 - 2\,d_1)\,s^5$$

$$+5\ (-24\,c_2 - 8\,b_2 + b_3 - 4\,d_2 + 51\,b_1 + 71\,a + 24\,d_1 + 140\,c_1)\,s^4$$

$$+4\ (-116\,d_1 - 215\,a - 133\,b_1 - 408\,c_1 + 27\,b_2 - 5\,b_3 + 44\,d_2 + 112\,c_2)\,s^3$$

$$+3\ (12\,b_3 + 706\,c_1 + 400\,a - 52\,b_2 + 292\,d_1 + 216\,b_1 - 184\,d_2 - 252\,c_2)\,s^2$$

$$+2\ (60\,b_2 - 738\,c_1 - 16\,b_3 - 468\,a + 270\,c_2 - 220\,b_1 - 414\,d_1 + 360\,d_2)\,s$$

$$+324\,a + 12\,b_3 + 132\,b_1 - 108\,c_2 - 40\,b_2 + 432\,c_1 - 324\,d_2 + 324\,d_1$$

Esempio Pratico molto complesso (6/11)

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 3$ (la seconda radice)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Q(s)G(s)|_{s=3} = 50b_2 + 105b_3, \qquad P'(3) = 7,$$

usando il valore precedentemente calcolato $b_3 = -\frac{13}{50}$ otteniamo $b_2 = -203/500$. Calcoliamo ora i polinomi in $s = 1 + i$ (la terza radice)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Q(s)G(s)|_{s=1+i} &= 44\, c_1 - 8\, d_1 - 32\, c_2 + 124\, d_2 \\ &+ 8\, ic_1 + 44\, id_1 - 32\, id_2 - 124\, ic_2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} P(s)|_{s=1+i} &= 3 + 2i \end{aligned}$$

mettendo a sistema e usando i valori di c_2 e d_2 otteniamo $c_1 = -6/625$ e $d_1 = 309/1250$.

Esempio Pratico molto complesso (7/11)

Calcoliamo ora

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(Q(s)G(s)) &= (42\,a + 42\,b_1 + 84\,c_1)\,s^5 \\
&+ (60\,c_2 - 330\,b_1 + 30\,b_2 - 390\,a - 780\,c_1 - 60\,d_1)\,s^4 \\
&+ (1420\,a - 480\,c_2 + 1020\,b_1 + 480\,d_1 + 2800\,c_1 + 20\,b_3 - 160\,b_2 - 80\,d_2)\,s^3 \\
&+ (-4896\,c_1 + 1344\,c_2 + 528\,d_2 - 2580\,a - 60\,b_3 - 1596\,b_1 - 1392\,d_1 + 324\,b_2)\,s^2 \\
&+ (72\,b_3 - 1512\,c_2 + 4236\,c_1 + 2400\,a + 1296\,b_1 - 312\,b_2 + 1752\,d_1 - 1104\,d_2)\,s \\
&- 936\,a + 540\,c_2 - 440\,b_1 + 720\,d_2 - 32\,b_3 - 828\,d_1 - 1476\,c_1 + 120\,b_2
\end{aligned}
$$

Esempio Pratico molto complesso (8/11)

Calcoliamo ora i polinomi in $s = 3$ (la seconda radice)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} Q(s)G(s)|_{s=3} = 100b_1 + 210b_2 + 184b_3, \qquad P''(3) = 2,$$

usando il valore precedentemente calcolato $b_3 = -\frac{13}{50}$ e $b_2 = -203/500$ otteniamo $b_1 = 1971/5000$.

Esempio Pratico molto complesso (9/11)

Mettendo tutto assieme otteniamo

$$
\begin{aligned}
G(s) = {} & \frac{-3/8}{s-1} + \frac{1971}{5000(s-3)} + \frac{-203}{500(s-3)^2} + \frac{13}{50(s-3)^3} \\
& + \frac{-6/625 + 309/1250i}{s-(1+i)} + \frac{-6/625 - 309/1250i}{s-(1-i)} \\
& + \frac{7/125 + 29/500i}{(s-(1+i))^2} + \frac{7/125 - 29/500i}{(s-(1-i))^2}
\end{aligned}
$$

Esempio Pratico molto complesso (10/11)

E usando le relazioni sulle radici complesse coniugate

$$
\begin{aligned}
G(s) = {} & \frac{-3/8}{s-1} + \frac{1971}{5000(s-3)} + \frac{-203}{500(s-3)^2} + \frac{13}{50(s-3)^3} \\
& + 2\left[\frac{-6}{625}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{309}{1250}\frac{1}{(s-1)^2+1}\right] \\
& - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{7}{125}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{29}{500}\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]
\end{aligned}
$$

Esempio Pratico molto complesso (11/11)

usando la tabella della trasformata di Laplace

$$G(t) = \frac{-3}{8}e^t + e^{3t}\left(\frac{1971}{5000} + \frac{-203}{500}t + \frac{13}{100}t^2\right)$$

$$+ e^t\left[\frac{-12}{625}\cos t + \frac{618}{1250}\sin t\right] + e^t t\left[\frac{14}{125}\cos t + \frac{58}{500}\sin t\right]$$

$$= e^t\left[\frac{-3}{8} + \left(\frac{-12}{625} + t\frac{14}{125}\right)\cos t + \left(\frac{618}{1250} + t\frac{58}{500}\right)\sin t\right]$$

$$+ e^{3t}\left(\frac{1971}{5000} + \frac{-203}{500}t + \frac{13}{100}t^2\right)$$