Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 7/1/2008

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ______________________

Vanno svolti almeno 5 esercizi. Il primo a scelta tra gli esercizi $(1, 2, 3)$. Il secondo a scelta in $(4, 5)$. Il terzo è obbligatoriamente il 6. Il quarto a scelta in il $(7, 8)$. Il quinto è il 9.

1 Livello difficoltà 1

Calcolare la anti-trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$\frac{s^2+s+1}{\left(s^2+1\right)^2} = \frac{2+t}{2}\sin t$$

$$\frac{s}{\left(s-1\right)^3} = \frac{t^2+2\,t}{2}e^t$$

$$\frac{s^2}{1-s^3} = -\frac{1}{3}e^t - \frac{2e^{-t/2}}{3}\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{3}\right)$$

2 Livello difficoltà 1

Calcolare la anti-trasformata Z delle seguenti funzioni

$$\frac{z\left(z^2+1\right)}{\left(z-1\right)^3} = 1+k+k^2$$

$$\frac{z\,e}{\left(z-e\right)^2} = ke^k$$

$$\frac{z}{z+e} = \left(-1\right)^k e^k$$

3 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$2x_{k+1} = y_k + 1$$
$$2y_{k+1} = x_k - 1$$

con dato iniziale $y_0 = x_0 = 1$.

Trasformata Zeta	$2z(x(z) - 1) = y(z) + \frac{z}{z-1}$ $2z(y(z) - 1) = x(z) - \frac{z}{z-1}$
Soluzione	$y_k = \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$ $x_k = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^k$

4 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x''(t) + x'(t) + y'(t) = 1$$
$$x'(t) + x(t) - y(t) = 0$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = y(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$sx(t) - 1 + s^2x(t) - s + sy(t) = s^{-1}$ $sx(t) - 1 - y(t) + x(t) = 0$
Soluzione in s:	$x(s) = \frac{1 + s + 2\,s^2}{2s^2\,(s+1)}$ $y(s) = \frac{s+1}{2s^2}$
Soluzione in t:	$x(t) = t/2 + e^{-t}$ $y(t) = (t+1)/2$

5 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria ai valori al contorno

$$y''(x) - y(x) = x$$

con dato iniziale $y(0) = 0$ e $y'(0) = A$ Calcolare la costante A in modo che $\lim_{x\to\infty} y(x)/\exp(x) = 1$

Trasformata di Laplace:	$s^2 y(s) - A - y(s) = s^{-2}$
Soluzione in s:	$\dfrac{1 + As^2}{s^2(s^2 - 1)}$
Soluzione in x:	$y(x) = (A+1)\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} - x$
Costante A:	$A = 1$

6 Livello difficoltà 1

Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	$\dfrac{\pi^2}{2}$
a_k	$=$	$\dfrac{\cos(\pi k) + \sin(\pi k)k\pi - 1}{k^2}$
b_k	$=$	$\dfrac{\cos(\pi k)k\pi - \sin(\pi k)}{k^2}$

7 Livello difficoltà 3

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad h_1(x,y,z) = xy + yz + xz - 1 = 0,$$
$$h_2(x,y,z) = x - y = 0.$$

Sistema non lineare per i punti stazionari:

$$\begin{bmatrix} 2\,x - \lambda\,(y+z) - \mu = 0 \\ 2\,y - \lambda\,(x+z) + \mu = 0 \\ 2\,z - \lambda\,(y+x) = 0 \\ -xy - yz - xz + 1 = 0 \\ -x + y = 0 \end{bmatrix}$$

Punti stazionari:

$$\begin{array}{rcl} \mu &=& 0 \\ \lambda &=& 1 \\ y &=& 1/\sqrt{3} \\ x &=& 1/\sqrt{3} \\ z &=& 1/\sqrt{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mu &=& 0 \\ \lambda &=& 1 \\ y &=& -1/\sqrt{3} \\ x &=& -1/\sqrt{3} \\ z &=& -1/\sqrt{3} \end{array}$$

Classificazione dei punti stazionari: Entrambi punti di minimo

8 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y,z) = xy + yz + xz,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad g_1(x,y,z) = x + y + z - 1 \geq 0,$$
$$h_1(x,y,z) = x - y = 0,$$
$$h_2(x,y,z) = x - y - z = 0,$$

Suggerimento: per la diseguaglianza usare una variabile slack quadratica.

Sistema non lineare per i punti stazionari:

$$\begin{bmatrix} y+z+\lambda-\mu-\eta=0 \\ x+z+\lambda+\mu+\eta=0 \\ y+x+\lambda+\eta=0 \\ -1+x+y+z+\epsilon^2=0 \\ -x+y=0 \\ -x+y+z=0 \\ 2\,\lambda\,\epsilon=0 \end{bmatrix}$$

Punti stazionari:

$$\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \\ z &=& 0 \\ \lambda &=& 0 \\ \mu &=& 0 \\ \eta &=& 0 \\ \epsilon &=& \pm 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x &=& 1/2 \\ y &=& 1/2 \\ z &=& 0 \\ \lambda &=& -1/2 \\ \mu &=& 1/2 \\ \eta &=& -1/2 \\ \epsilon &=& 0 \end{array}$$

Classificazione dei punti stazionari

9 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria calcolare l'indice mediante riduzione dello stesso

$$\begin{aligned} y'(t)+x(t) &= f(t), \\ z'(t)+y(t) &= g(t), \\ z(t) &= h(t). \end{aligned}$$

Indice: 3

DAE ridotta ad ODE:

$$\begin{array}{rcl} x'(t) &=& f'(t)-g''(t)+h'''(t), \\ y'(t)+x(t) &=& f(t), \\ z'(t)+y(t) &=& g(t). \end{array}$$