Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 18/2/2008

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ______________________

Vanno svolti almeno 5 esercizi. Il primo a scelta tra gli esercizi $(1, 2, 3)$. Il secondo a scelta in $(4, 5)$. Il terzo è obbligatoriamente il 6. Il quarto a scelta in il $(7, 8)$. Il quinto è il 9.

1 Livello difficoltà 1

Calcolare la anti-trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$\frac{s^2+s+2}{(s^2+2)^2} \to \frac{\sqrt{2}}{4}(2+t)\sin(\sqrt{2}\,t)$$

$$\frac{s^2}{(s-1)^3} \to \frac{1}{2}e^t(2+4t+t^2)$$

$$\frac{1+2s}{1-s^2} \to -\frac{3e^t+e^{-t}}{2}$$

2 Livello difficoltà 1

Calcolare la anti-trasformata Z delle seguenti funzioni

$$\frac{z(z+a)a}{(z-a)^3} \to a^k k^2$$

$$\frac{z\,e^2}{ze^2-1} \to e^{-2k}$$

$$\frac{5z}{(z-3)(z+2)} \to 3^k - (-2)^k$$

3 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$2x_{k+1} + y_{k+1} = x_k - 1$$
$$x_{k+1} - y_{k+1} = x_k - y_k + 1$$

con dato iniziale $y_0 = x_0 = 1$.

Soluzione in Zeta	$x(z) = \frac{z(3z^2 - 6z + 4)}{3z^3 - 7z^2 + 5z - 1} = \frac{z(3z^2 - 6z + 4)}{(3z-1)(z-1)^2}$ $y(z) = \frac{z(3z^2 - 9z + 5)}{3z^3 - 7z^2 + 5z - 1} = \frac{z(3z^2 - 9z + 5)}{(3z-1)(z-1)^2}$
Soluzione	$x_k = \frac{7}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{k}{2} - \frac{3}{4}$ $y_k = \frac{7}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{k}{2} - \frac{3}{4}$

4 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$2x''(t) + x'(t) - y'(t) = x(t)$$
$$x'(t) + x(t) - y(t) = 1$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = y(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$(2s^2 + s - 1)x(t) - sy(t) = 1 + 2s$ $(s+1)x(t) - y(t) = 1 + \frac{1}{s}$
Soluzione in s:	$x(s) = \frac{s}{s^2 - 1}$ $y(s) = \frac{1}{(s-1)s}$
Soluzione in t:	$x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ $y(t) = e^t - 1$

5 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria ai valori al contorno

$$y''(x) - y'(x) = 1$$

con dato iniziale $y(0) = 0$ e $y'(0) = A$ Calcolare la costante A in modo che $\lim_{x\to+\infty} y(x)/\exp(x) = 1$

Trasformata di Laplace: $s^2y(s) - A - sy(s) = \dfrac{1}{s}$
Soluzione in s: $\dfrac{As+1}{s^2(s-1)}$
Soluzione in x: $y(x) = e^x - x - 1 + A(e^x - 1)$
Costante A: $A = 0$

6 Livello difficoltà 1

Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x/2 & x > 0 \end{cases}$$

Definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	$\dfrac{3\pi}{8}$
a_k	$=$	$\dfrac{3}{2}\dfrac{\cos(\pi k) + \sin(\pi k)k\pi - 1}{\pi k^2} = \dfrac{3}{2}\dfrac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}$
b_k	$=$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos(\pi k)k\pi - \sin(\pi k)}{\pi k^2} = \dfrac{(-1)^k}{2k}$

7 Livello difficoltà 3

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y, z) = xyz,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad \begin{aligned} h_1(x, y, z) &= xy + yz + xz - 1 = 0, \\ h_2(x, y, z) &= x - y = 0. \end{aligned}$$

Sistema non lineare per i punti stazionari:
$$\begin{cases} yz - \lambda\,(y + z) - \mu = 0 \\ xz - \lambda\,(x + z) + \mu = 0 \\ xy - \lambda\,(y + x) = 0 \\ xy + yz + xz = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Punti stazionari:
$$\begin{array}{rcl} \mu &=& 0 \\ \lambda &=& 1/(2\sqrt{3}) \\ y &=& 1/\sqrt{3} \\ x &=& 1/\sqrt{3} \\ z &=& 1/\sqrt{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mu &=& 0 \\ \lambda &=& -1/(2\sqrt{3}) \\ y &=& -1/\sqrt{3} \\ x &=& -1/\sqrt{3} \\ z &=& -1/\sqrt{3} \end{array}$$

Classificazione dei punti stazionari: In primo è un punto di massimo il secondo è un punto di minimo

8 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y, z) = xy + z,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad \begin{aligned} g_1(x, y, z) &= 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \\ h_1(x, y, z) &= x - y = 0, \\ h_2(x, y, z) &= x - y - z = 0, \end{aligned}$$

Suggerimento: per la diseguaglianza usare una variabile slack quadratica.

Sistema non lineare per i punti stazionari:

$$\begin{cases} y - 2\,\lambda\,x - \mu - \eta = 0 \\ x - 2\,\lambda\,y + \mu + \eta = 0 \\ 1 - 2\,\lambda\,z + \eta = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 1 + \epsilon^2 = 0 \\ -x + y = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 2\,\lambda\,\epsilon = 0 \end{cases}$$

Punti stazionari:

$$\begin{array}{rcl} x &=& -1/\sqrt{2} \\ y &=& -1/\sqrt{2} \\ z &=& 0 \\ \lambda &=& 1/2 \\ \mu &=& 1 \\ \eta &=& -1 \\ \epsilon &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x &=& 1/\sqrt{2} \\ y &=& 1/\sqrt{2} \\ z &=& 0 \\ \lambda &=& 1/2 \\ \mu &=& 1 \\ \eta &=& -1 \\ \epsilon &=& 0 \end{array}$$

Classificazione dei punti stazionari

9 Livello difficoltà 1

Data la seguente equazione differenziale ordinaria calcolare l'indice mediante riduzione dello stesso

$$\begin{aligned} y'(t) + x'(t) &= f(t), \\ z'(t) + y'(t) &= g(t), \\ z(t) &= h(t). \end{aligned}$$

Indice: 1

DAE ridotta ad ODE:

$$\begin{array}{rcl} x'(t) &=& f(t) - g(t) + h'(t), \\ y'(t) &=& g(t) - h'(t), \\ z'(t) &=& h'(t). \end{array}$$