Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 21/6/2008

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ____________________

Vanno svolti almeno 5 esercizi. Il primo a scelta tra gli esercizi $(1, 2, 3)$. Il secondo a scelta in $(4, 5)$. Il terzo è obbligatoriamente il 6. Il quarto a scelta in il $(7, 8)$. Il quinto è il 9.

1 Livello difficoltà 1

Calcolare la anti-trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)} \to -e^{-t} + 2\,e^{-2\,t}$$

$$\frac{s^2}{(s-1)^2(s+2)} \to \frac{4\,e^{-2\,t} + e^t(3\,t+5)}{9}$$

$$\frac{s}{(s+1)^2} \to (1-t)e^{-t}$$

2 Livello difficoltà 1

Calcolare la anti-trasformata Z delle seguenti funzioni

$$\frac{z\,(z^2 - 3\,z + 4)}{(z-1)^3} \to 1 - 2\,k + k^2$$

$$\frac{az}{(z-a)^2} \to a^k k$$

$$\frac{z\,(3-a)}{(z-3)(z-a)} \to -a^k + 3^k$$

3 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$\begin{aligned} 6x_{k+1} + y_{k+1} &= 4x_k - 1 \\ x_{k+1} - 2y_{k+1} &= x_k - 2y_k + 1 \end{aligned}$$

con dato iniziale $y_0 = x_0 = 1$.

Soluzione in zeta	$x(z) = \dfrac{z\,(13\,z^2 - 28\,z + 16)}{(13\,z - 8)\,(z-1)^2}$ $y(z) = \dfrac{(13\,z^2 - 31\,z + 16)\,z}{(13\,z - 8)\,(z-1)^2}$
Soluzione	$x_k = -\dfrac{23}{25} + \dfrac{48}{25}\left(\dfrac{8}{13}\right)^k + \dfrac{k}{5}$ $y_k = \dfrac{1}{25} + \dfrac{24}{25}\left(\dfrac{8}{13}\right)^k - \dfrac{2k}{5}$

4 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned} x''(t) + x'(t) - y'(t) &= 0 \\ x'(t) + x(t) - 2y(t) &= 0 \end{aligned}$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $x'(0) = y(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$(s^2 + s)\,x(s) - sy(s) = 1 + s$ $(s+1)\,x(s) - 2y(s) = 1$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{2+s}{s(s+1)}$ $y(s) = \dfrac{1}{s}$
Soluzione in t:	$x(t) = 2 - e^{-t}$ $y(t) = 1$

5 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria ai valori al contorno

$$y''(x) - 2y'(x) + y(t) = e^{-x}$$

con dato iniziale $y(0) = 0$ e $y'(0) = A$ Calcolare la costante A in modo che $y(1) = 1$

Trasformata di Laplace:	$s^2 y(s) - A - 2sy(s) + y(s) = \dfrac{1}{s+1}$
Soluzione in s:	$\dfrac{A(1+s)+1}{(1+s)(s-1)^2}$
Soluzione in x:	$y(x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}\left(x(4A+2)-1\right)}{4}$
Costante A:	$A = -\dfrac{e^{-1}+e-4}{4e}$

6 Livello difficoltà 1

Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

Definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	$\dfrac{2}{\pi}$
a_k	$=$	$\dfrac{1+(-1)^k}{(1-k^2)\pi}$
b_k	$=$	0

7 Livello difficoltà 3

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y,z) = xy,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad h_1(x,y,z) = x + y + z^2 - 1 = 0,$$
$$h_2(x,y,z) = x^2 - 1 = 0.$$

Sistema non lineare per i punti stazionari:

$$\begin{cases} y - \lambda - 2\,\mu\, x = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ 2\,\lambda\, z = 0 \\ 1 - x - y - z^2 = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases}$$

Punti stazionari:

$$\begin{array}{rcl} \mu &=& -1/2 \\ \lambda &=& 1 \\ y &=& 1 \\ x &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mu &=& -3/2 \\ \lambda &=& -1 \\ y &=& -1 \\ x &=& 2 \\ z &=& 0 \end{array}$$

Classificazione dei punti stazionari: In primo è un punto di massimo il secondo è un punto di minimo

8 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y,z) = y,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad g_1(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 \leq 0,$$
$$g_2(x,y,z) = -x \geq 0,$$

Suggerimento: per le diseguaglianze usare due variabili slack quadratiche.

Sistema non lineare per i punti stazionari:

$$\begin{cases} -2\,\lambda\,x - \mu = 0 \\ 1 - 2\,\lambda\,y = 0 \\ -2\,\lambda\,z = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 1 + \epsilon^2 = 0 \\ -x + \zeta^2 = 0 \\ \lambda\,\epsilon = 0 \\ \mu\,\zeta = 0 \end{cases}$$

Punti stazionari:

$$\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& -1 \\ z &=& 0 \\ \lambda &=& -1/2 \\ \mu &=& 0 \\ \epsilon &=& 0 \\ \zeta &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 1 \\ z &=& 0 \\ \lambda &=& +1/2 \\ \mu &=& 0 \\ \epsilon &=& 0 \\ \zeta &=& 0 \end{array}$$

Classificazione dei punti stazionari

9 Livello difficoltà 1

Data la seguente equazione differenziale ordinaria calcolare l'indice mediante riduzione dello stesso

$$\begin{aligned} x'(t) + z(t) &= f(t), \\ y(t) &= g(t), \\ x(t) &= h(t). \end{aligned}$$

Indice: 2

DAE ridotta ad ODE:

$$\begin{array}{rcl} x'(t) &=& h'(t), \\ y'(t) &=& g'(t), \\ z'(t) &=& f'(t) - h''(t). \end{array}$$