Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 18/7/2008

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ____________________

Vanno svolti almeno 5 esercizi. Il primo a scelta tra gli esercizi $(1, 2, 3)$. Il secondo a scelta in $(4, 5)$. Il terzo è obbligatoriamente il 6. Il quarto a scelta in il $(7, 8)$. Il quinto è il 9.

1 Livello difficoltà 1

Calcolare la anti-trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$\dfrac{s}{s^2 - s} \quad \to \quad e^t$
$\dfrac{s^2}{(s^2+1)(s+2)} \quad \to \quad \dfrac{4e^{-2t} + \cos t - 2\sin t}{5}$
$\dfrac{s}{(2+s)^2} \quad \to \quad (1-2t)e^{-2t}$

2 Livello difficoltà 1

Calcolare la anti-trasformata Z delle seguenti funzioni

$\dfrac{z(z^2+1)}{(z-1)^3} \quad \to \quad 1 + k + k^2$
$\dfrac{z(z^2 - z + 1 - a)}{(z-a)(z-1)^2} \quad \to \quad a^k + k$
$\dfrac{z(2z - b - a)}{(z-a)(z-b)} \quad \to \quad a^k + b^k$

3 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$2x_{k+1} + y_{k+1} = x_k - 1$$
$$x_{k+1} + 2y_{k+1} = y_k$$

con dato iniziale $y_0 = x_0 = 1$.

Soluzione in zeta	$x(z) = \dfrac{z(3z-2)(z-2)}{(3z-1)(z-1)^2}$ $y(z) = \dfrac{z(3z^2-5z+3)}{(3z-1)(z-1)^2}$
Soluzione	$x_k = \dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$ $y_k = -\dfrac{k}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k = x_k - k$

4 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x'(t) - y'(t) + y''(t) = 0$$
$$x'(t) + x(t) - y(t) = 0$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$sx(z) + (s^2 - s)y(s) = 1$ $(s+1)x(s) - y(s) = 1$
Soluzione in s:	$x(s) = \dfrac{1-s+s^2}{s^3}$ $y(s) = \dfrac{1}{s^3}$
Soluzione in t:	$x(t) = 1 - t - \dfrac{t^2}{2}$ $y(t) = \dfrac{t^2}{2}$

5 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria ai valori al contorno

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = xe^{-x}$$

con dato iniziale $y(0) = 0$ e $y'(0) = A$ Calcolare la costante A in modo che $y(1) = e^{-1}/6$

Trasformata di Laplace:	$s^2 y(s) - A + 2sy(s) + y(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$
Soluzione in s:	$\dfrac{A(1+s)^2 + 1}{(1+s)^4}$
Soluzione in x:	$y(x) = e^{-x} x \left(A + \dfrac{x^2}{6}\right)$
Costante A:	$A = 0$

6 Livello difficoltà 1

Data la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi + x) & x \leq 0 \\ x(\pi - x) & x > 0 \end{cases}$$

Definita per $x \in (-\pi, \pi)$ ed estesa per periodicitá, calcolare i coefficienti della serie di Fourier:

a_0	$=$	0
a_k	$=$	0
b_k	$=$	$\dfrac{4}{\pi k^3}\left(1 - (-1)^k\right)$

7 Livello difficoltà 3

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y, z) = xz,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$
$$h_2(x, y, z) = z - 1 = 0.$$

Sistema non lineare per i punti stazionari:	$\begin{cases} z - 2\,\lambda\,x = 0 \\ 2\,\lambda\,y = 0 \\ x - \mu = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$
Punti stazionari:	$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \\ \mu &= 1 \\ \lambda &= \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \\ \mu &= -1 \\ \lambda &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$
Classificazione dei punti stazionari:	In primo è un punto di massimo il secondo è un punto di minimo

8 Livello difficoltà 4

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x, y, z) = z,$$

$$\text{Vincoli:} \qquad g_1(x, y, z) = x^2 + y + z^2 \geq 0,$$
$$g_2(x, y, z) = x + y^2 + z^2 \geq 0,$$

Suggerimento: per le diseguaglianze usare due variabili slack quadratiche.

Sistema non lineare per i punti stazionari:	$\begin{cases} \mu + 2\,\lambda\,x = 0 \\ \lambda + 2\,\mu\,y = 0 \\ 1 - 2\,(\lambda+\mu)z = 0 \\ x^2 + y + z^2 - \epsilon^2 = 0 \\ x + y^2 + z^2 - \zeta^2 = 0 \\ 2\,\lambda\,\epsilon = 0 \\ 2\,\mu\,\zeta = 0 \end{cases}$
Punti stazionari:	$\begin{array}{rcl} x &=& -1/2 \\ y &=& -1/2 \\ z &=& +1/2 \\ \lambda &=& 1/2 \\ \mu &=& 1/2 \\ \epsilon &=& 0 \\ \zeta &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x &=& -1/2 \\ y &=& -1/2 \\ z &=& -1/2 \\ \lambda &=& -1/2 \\ \mu &=& -1/2 \\ \epsilon &=& 0 \\ \zeta &=& 0 \end{array}$
Classificazione dei punti stazionari: primo: Massimo locale, secondo Minimo locale	

9 Livello difficoltà 1

Data la seguente equazione differenziale ordinaria calcolare l'indice mediante riduzione dello stesso

$$\begin{aligned} x'(t) + z(t) &= f(t), \\ y(t) &= g(t), \\ x(t) &= h(t). \end{aligned}$$

Indice:	2
DAE ridotta ad ODE:	$\begin{array}{rcl} x'(t) &=& h'(t), \\ y'(t) &=& g'(t), \\ z'(t) &=& f'(t) - h''(t). \end{array}$