Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria del 2/9/2008

Cognome		Nome		Matricola	

Firma ____________________

1 Livello difficoltà 2

Calcolare la soluzione del seguente sistema di ricorrenze

$$x_{k+1} - y_{k+1} = x_k - k$$

$$y_{k+1} - x_{k+1} = y_k + k$$

con dato iniziale $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

Trasformata zeta	$z\,(x(z) - y(z) + 2) = x(z) - \dfrac{z}{(z-1)^2}$ $z\,(y(z) - x(z) - 2) = y(z) + \dfrac{z}{(z-1)^2}$
Soluzione in zeta	$x(z) = -\dfrac{z(2z^2-4z+3)}{(2z-1)(z-1)^2} = \dfrac{2z}{z-1} - \dfrac{6z}{2z-1} - \dfrac{z}{(z-1)^2}$ $y(z) = \dfrac{z(2z^2-4z+3)}{(2z-1)(z-1)^2} = -\dfrac{2z}{z-1} + \dfrac{6z}{2z-1} + \dfrac{z}{(z-1)^2}$
Soluzione	$x_k = 2 - k - 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ $y_k = -2 + k + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^k = -x_k$

Svolgimento:

2 Livello difficoltà 2

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$x'(t) - y'(t) + 2x''(t) = t$$
$$x'(t) + y'(t) - 2x''(t) = t^2$$

con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Calcolare:

Trasformata di Laplace:	$$\begin{aligned}(2s^2 + s)x(s) - sy(s) - 2s - 1 &= \frac{1}{s^2}\\ (-2s^2 + s)x(s) + sy(s) + 2s - 1 &= \frac{2}{s^3}\end{aligned}$$
Soluzione in s:	$$\begin{aligned}x(s) &= \frac{2 + s + 2s^3}{2s^4} = \frac{1}{2s^3} + \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s}\\ y(s) &= \frac{2 + 3s + 2s^2}{2s^4} = \frac{3}{2s^3} + \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$
Soluzione in t:	$$\begin{aligned}x(t) &= 1 + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6}\\ y(t) &= t + \frac{3t^2}{4} + \frac{t^3}{6}\end{aligned}$$

Svolgimento:

3 Livello difficoltà 2

Data la seguente equazione differenziale ordinaria ai valori al contorno

$$y''(x) = \cos(x)$$

con dato iniziale $y(0) = 0$ e $y'(0) = A$ Calcolare la costante A in modo che $y(\pi) = 0$

Trasformata di Laplace:	$s^2 y(s) - A = \dfrac{s}{1+s^2}$
Soluzione in s:	$\dfrac{A}{s^2} + \dfrac{1}{s(s^2+1)}$
Soluzione in x:	$y(x) = Ax + 1 - \cos(x)$
Costante A:	$A = -\dfrac{2}{\pi}$

Svolgimento:

4 Livello difficoltà 3

Risolvere il seguente problema di minimo vincolato

$$f(x,y,z) = x,$$

$$\text{Vincoli:} \quad h_1(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0,$$
$$h_2(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0.$$

Sistema non lineare per i punti stazionari:	$\begin{cases} 1 - 2\,\lambda\,x - \mu = 0 \\ -4\,\lambda\,y - \mu = 0 \\ -2\,\lambda\,z - \mu = 0 \\ x^2 + 2\,y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$
Punti stazionari:	$x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{4}{5}$, $\mu = \frac{4}{5}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$
Classificazione dei punti stazionari:	In primo è un punto di massimo il secondo è un punto di minimo

Svolgimento:

5 Livello difficoltà 1

Data la seguente DAE nelle incognite $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $w(t)$:

$$\begin{aligned} w'(t) + x(t) &= e(t), \\ w(t) &= f(t), \\ z(t) + w(t) &= g(t), \\ x(t) + y(t) + z(t) + w(t) &= h(t). \end{aligned}$$

calcolare l'indice mediante riduzione della DAE ad ODE

Indice: 2

DAE ridotta ad ODE:

$$\begin{array}{rcl} x'(t) & = & e'(t) - f''(t), \\ y'(t) & = & -e'(t) + f''(t) - g'(t) + h'(t), \\ z'(t) - x(t) & = & -e(t) + g'(t), \\ w'(t) + x(t) & = & e(t). \end{array}$$

Svolgimento: