Esercizi svolti sulla trasformata di Laplace

Enrico Bertolazzi

Anno Accademico 2007/2008

Sommario

primo schizzo...

Tabella delle Trasformate

$a\,f(t)+b\,g(t)$	$a\,\widehat{f}(s)+b\,\widehat{g}(s)$	1
$f(at)$	$\frac{1}{a}\,\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \qquad [a>0]$	2
$e^{at}f(t)$	$\widehat{f}(s-a)$	3
$f(t-a)$	$e^{-as}\widehat{f}(s)$	4
1	$\frac{1}{s}$	5
t	$\frac{1}{s^2}$	6
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	7
a^{bt}	$\frac{1}{s-b\log a}$	8
$\int_0^t f(z)\,\mathrm{d}z$	$\frac{1}{s}\widehat{f}(s)$	9
$f'(t)$	$s\widehat{f}(s)-f(0^+)$	10
$f''(t)$	$s^2\widehat{f}(s)-f'(0^+)-sf(0^+)$	11
$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}f(t)$	$s^n\widehat{f}(s)-\sum_{j=0}^{n-1}s^{n-j-1}f^{(j)}(0^+)$	12
$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\widehat{f}(s)$	13
$(f\star g)(t)$	$\widehat{f}(s)\,\widehat{g}(s)$	14
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	15
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	16
$e^{at}\cosh\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$	17
$e^{at}\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$	18
$e^{at}t^n$	$2 \quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	19
$e^{\alpha t}-e^{\beta t}$	$\frac{\alpha-\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	20

1 Esercizi svolti

1.1 Equazioni integrali

Risolvere la seguente equazione integrale

$$y(t) = \sin(t) + \int_0^t \cos(t - z)y(z)dz$$

Svolgimento: ricordiamo che $\int_0^t \cos(t - z)y(z)dz = (\cos \star y)(t)$

regola 1

$$y(s) = \mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{(\cos \star y)(t)\right\}(s)$$

regola 16 con $\omega = 1$, $a = 0$

$$y(s) = \frac{1}{1 + s^2} + \mathcal{L}\left\{(\cos \star y)(t)\right\}(s)$$

regola 14

$$y(s) = \frac{1}{1 + s^2} + \mathcal{L}\left\{\cos(t)\right\}(s)\, y(s)$$

regola 15 con $\omega = 1$, $a = 0$

$$y(s) = \frac{1}{1 + s^2} + \frac{s}{1 + s^2}\, y(s)$$

isoliamo $y(s)$

$$y(s) = \frac{1}{s^2 - s + 1}$$

completamento del quadrato

$$s^2 - s + 1 = (s - a)^2 + b = s^2 - 2as + a^2 + b$$

da cui segue $a = \frac{1}{2}$, $b = 3/4$

$$y(s) = \frac{1}{(s - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

regola 15 con $a = \frac{1}{2}$ e $\omega = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$$y(t) = \sqrt{\frac{4}{3}} e^{t/2} \cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\, t\right)$$

Risolvere la seguente equazione integro-differenziale

$$y'(t) - y(t) = 1 + \sin(t) + 2\int_0^t (t-z)y(z)dz, \qquad \text{con} \quad y(0) = 1$$

Svolgimento:

regola 1

$$\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\}(s) + y(s) = \mathcal{L}\left\{1\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\}(s) + 2\mathcal{L}\left\{(t \star y)(t)\right\}(s)$$

regola 10 con $y(0) = 1$

$$s\, y(s) - 1 + y(s) = \mathcal{L}\left\{1\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{\sin(t)\right\}(s) + 2\mathcal{L}\left\{(t \star y)(t)\right\}(s)$$

regola 5 e 16 con $a = 0$ e $\omega = 1$

$$s\, y(s) - 1 + y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} + 2\mathcal{L}\left\{(t \star y)(t)\right\}(s)$$

regola 14

$$s\, y(s) - 1 + y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} + 2\mathcal{L}\left\{t\right\}(s)\, y(s)$$

regola 6

$$s\, y(s) - 1 + y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{s^2}\, y(s)$$

isoliamo $y(s)$

$$y(s)\frac{s^3+s^2-2}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}$$

dobbiamo fattorizzare $s^3 + s^2 - 2$, si vede subito che $s = 1$ è una radice del polimonio. Dividendo per $s - 1$ otteniamo

$$s^3 + s^2 - 2 = (s-1)(s^2 + 2s + 2)$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)}\left(s+\frac{2}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{s^3+s+2}{(s-1)(s^2+2s+2)(s^2+1)} \end{aligned}$$

fattorizziamo il denominatore s^2+2s+2

$$y(s) = \frac{s^3+s+2}{(s-1)(s+1+\imath)(s+1-\imath)(s+\imath)(s-\imath)}$$

cerchiamo la fattorizzazione in fratti semplici

$$y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B+\imath C}{s+1+\imath} + \frac{B-\imath C}{s+1-\imath} + \frac{D+\imath E}{s+\imath} + \frac{D-\imath E}{s-\imath}$$

determiniamo i coefficienti

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{s^3+s+2}{(s^2+2s+2)(s^2+1)}\right|_{s=1} = \frac{2}{5} \\ B+\imath C &= \left.\frac{s^3+s+2}{(s-1)(s+1-\imath)(s+\imath)(s-\imath)}\right|_{s=-1-\imath} = -\frac{3}{10}+\imath\frac{3}{10} \\ D+\imath E &= \left.\frac{s^3+s+2}{(s-1)(s+1+\imath)(s+1-\imath)(s-\imath)}\right|_{s=-\imath} = \frac{1}{10}-\imath\frac{3}{10} \end{aligned}$$

sostituendo e combinando le frazioni coniugate

$$y(s) = \frac{1}{10}\left[\frac{4}{s-1} + \frac{-6s}{s^2+2s+2} + \frac{2s-6}{s^2+1}\right]$$

completo i quadrati per la seconda frazione

$$y(s) = \frac{1}{10}\left[\frac{4}{s-1} - \frac{6s}{(s+1)^2+1} + \frac{2s-6}{s^2+1}\right]$$

spezzo la seconda e terza frazione per avere una migliore corrispondenza con la tabella

$$y(s) = \frac{1}{10}\left[\frac{4}{s-1} - 6\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + 6\frac{1}{(s+1)^2+1} + 2\frac{s}{s^2+1} - 6\frac{1}{s^2+1}\right]$$

costruzione della antitrasformata Applichiamo in sequenza le seguenti regole:

1. regola 19 con $a = 1$, $n = 0$
2. regola 15 con $a = -1$, $\omega = 1$
3. regola 16 con $a = -1$, $\omega = 1$
4. regola 15 con $a = 0$, $\omega = 1$
5. regola 16 con $a = 0$, $\omega = 1$

Soluzione:

$$y(s) = \frac{1}{10}\left[4e^t + 6e^{-t}(\sin t - \cos t) + 2\cos t - 6\sin t\right]$$

1.2 Equazioni alle derivate parziali

Equazione del calore sulla semiretta. Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, && x \in (0,\infty), \quad t > 0 \\ u(0,x) &= 0, && x \in (0,\infty) \\ u(t,0) &= \phi(t), && t > 0 \\ \lim_{x\to+\infty} u(t,x) &= 0, && t \geq 0 \end{aligned}$$

cerchiamo la soluzione.
Svolgimento:

trasformiamo con Laplace rispetto a t

$$\begin{aligned} su(s,x) - u(0,x) &= \frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} \\ u(s,0) &= \phi(s), \\ \lim_{x\to+\infty} u(s,x) &= 0 \end{aligned}$$

per ogni s considero il problema

$$\begin{aligned} sy(x) &= y''(x) \\ y(0) &= \phi(s), \\ \lim_{x\to+\infty} y(x) &= 0 \end{aligned}$$

trasformiamo con Laplace rispetto a x questo problema, chiamo z la variabile trasform

$$sy(z) = z^2 y(z) - zy(0) - y'(0)$$

e usando la condizione iniziale $y(0) = \phi(s)$

$$sy(z) = z^2 y(z) - z\phi(s) - y'(0)$$

risolviamo rispetto a $y(z)$

$$y(z) = \frac{z\phi(s) + y'(0)}{z^2 - s}$$

Antitrasformiamo con le regole 17 e 18

$$y(x) = \phi(s)\cosh\left(x\sqrt{s}\right) + \frac{y'(0)\,\sinh\left(x\sqrt{s}\right)}{\sqrt{s}}$$

convertiamo in esponenziali usando le relazioni:

$$\sinh(x) = 1/2\,e^{x} - 1/2\,e^{-x}, \qquad \cosh(x) = 1/2\,e^{x} + 1/2\,e^{-x}$$

ottenendo

$$y(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\phi(s)\sqrt{s} + y'(0)\right)e^{x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} + \frac{1}{2}\,\frac{\left(\phi(s)\sqrt{s} - y'(0)\right)e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

determinamo $y'(0)$ **da** $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$

$$y'(0) = -\phi(s)\sqrt{s}$$

da cui

$$u(s,x) = y(x) = \phi(s)\,e^{-x\sqrt{s}}$$

calcolo della soluzione. Poiché la soluzione è il prodotto di due trasformate uso la regola 14 per esprimere la soluzione come una convoluzione. Per fare questo bisogna conoscere l'antitrasformata di $e^{-c\sqrt{s}}$ che è la seguente:

$$e^{-c\sqrt{s}} = \mathcal{L}\left\{\frac{c\,t^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{c^2}{4t}}\right\}(s)$$

e usandola nella precedente espressione:

$$u(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \phi(t-z)z^{-3/2}e^{-\frac{x^2}{4z}}\,\mathrm{d}z$$