Il metodo del partizionamento delle coordinate

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2007/2008

Outline

Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 1 scelta delle coordinate indipendenti

Riconsideriamo le equazioni del pendolo in coordinate sovrabbondanti

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= \mu x \\
\dot{v} &= \mu y - g \\
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v \\
x^2 + y^2 &= r^2
\end{aligned}
$$

Possiamo usare il vincolo per determinare ad esempio y in funzione di x come segue

$$y(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

posso quindi eliminare la equazione del vincolo (dal sistema) e sostituire formalmente al posto di y la sua funzione $y(x)$.

Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 2 propagazione del vincolo

Elimino la equazione del vincolo (dal sistema) e sostituisco y con la sua funzione $y(x)$.

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= \mu x \\
\dot{v} &= \mu y(x) - g \\
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v \\
y(x) &= -\sqrt{r^2 - x^2}
\end{aligned}
$$

Derivando l'equazione del vincolo posso derivare una equazione per $\dot{y}(x)$

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{y} = -x\dot{x}/y \quad \Longrightarrow \quad v = -xu/y$$

e quindi ottenere

$$\dot{y} = v(x,u) = -\frac{xu}{y(x)}$$

Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 2 propagazione del vincolo

Sostituisco $\dot{y}$ con la sua funzione $v(x,u)$ nella quarta equazione ottenendo

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y(x) - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$v(x,u) = -\frac{xu}{y(x)}$$

$$y(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 2 propagazione del vincolo

Derivando ancora una volta il vincolo ottengo una equazione per $\ddot{y} = \dot{v}$

$$x\dot{u} + y\dot{v} + \dot{x}u + \dot{y}v = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\mu(x^2 + y^2) - gy + (u^2 + v^2) = 0$$

da qui posso ricavare μ come funzione di x ed u

$$\mu(x,u) = \frac{gy(x) - (u^2 + v(x,u)^2)}{r^2}$$

posso quindi scrivere $\mu = \mu(x,u)$ nelle equazioni ed eliminare

$$\dot{v}(x,u) = \mu(x,u)y(x) - g$$

perché è una equazione algebrica ridondante per $\mu(x,u)$

Coordinate Partitioning

Esempio con le equazioni del pendolo: Passo 2 propagazione del vincolo

Sostituisco $\mu = \mu(x,u)$

$$\dot{u} = \mu(x,u)x$$

$$\dot{x} = u$$

$$\mu(x,u) = \frac{gy(x) - (u^2 + v(x,u)^2)}{r^2}$$

$$v(x,u) = -\frac{xu}{y(x)}$$

$$y(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

di fatto abbiamo ottenuto sistema di ODE costituito da 2 equazioni ed $\mu(x,u)$ è calcolato ricorsivamente.

Collatz e RK4

A questo punto possiamo anche usare un integratore esplicito, tipo Collatz

$$u_{k+1/2} = u_k + (h/2)\mu(x_k, u_k)x_k$$

$$x_{k+1/2} = k_k + (h/2)u_k$$

$$u_{k+1} = u_k + (h/2)\mu(x_{k+1/2}, u_{k+1/2})x_{k+1/2}$$

$$x_{k+1} = k_k + (h/2)u_{k+1/2}$$

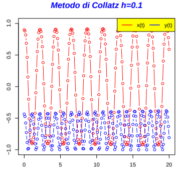
Collatz e RK4

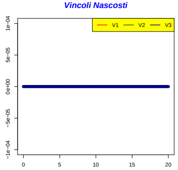
O il classico Runge-Kutta del quarto ordine

$$
\begin{aligned}
K_1 &= hu_k \\
L_1 &= h\mu(x_k, u_k) \\
K_2 &= h(u_k + L_1/2) \\
L_2 &= h\mu(x_k + K_1/2, u_k + L_1/2)(x_k + K_1/2) \\
K_3 &= h(u_k + L_2/2) \\
L_3 &= h\mu(x_k + K_2/2, u_k + L_2/2)(x_k + K_2/2) \\
K_4 &= h(u_k + L_3) \\
L_4 &= h\mu(x_k + K_3, u_k + L_3) * (x_k + K_3) \\
x_{k+1} &= x_k + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6 \\
u_{k+1} &= u_k + (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)/6
\end{aligned}
$$

Risultati con Collatz
DAE integrata con coordinate partitioning

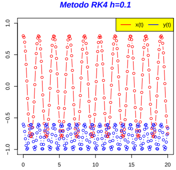
Dato iniziale consistente $x_0 = 0.9$, $u_0 = 0$

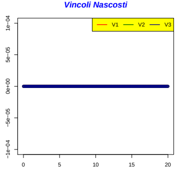




Risultati con RK4
DAE integrata con coordinate partitioning

Dato iniziale consistente $x_0 = 0.8$, $u_0 = 0$





Bibliografia

J. García de Jalón and E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real-Time Challenge*
Springer-Verlag, New-York, 1994
http://mat21.etsii.upm.es/mbs/bookPDFs/bookGjB.htm