

# Alcuni esempi di soluzione Numerica delle DAE

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2007/2008



## Outline

- 1 Un esempio semplice
- 2 L'equazione del pendolo in coordinate sovrabbondanti



## Un esempio semplice

Consideriamo la seguente DAE

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

Che ha come unica soluzione

$$x(t) = \sin(t)$$

$$y(t) = -\cos(t)$$



E scritta come DAE lineare  $\mathbf{F}x'(t) + \mathbf{G}x(t) = \mathbf{h}(t)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere la DAE in forma normale di Kronecker

$$\mathbf{N} \begin{pmatrix} y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \mathbf{I} \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

poiché  $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$  abbiamo che una DAE di indice 2. Notiamo inoltre che non bisogna specificare il dato iniziale perché nella forma normale il blocco  $\mathbf{C}$  è assente.



## Valori iniziali consistenti

Riconsideriamo

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

I valori  $x_0$  e  $y_0$  sono valori iniziali consistenti se soddisfano il vincolo

$$x(t) = \sin(t)$$

ed il vincolo nascosto ottenuto derivando il vincolo precedente

$$-y(t) = x'(t) = \cos(t)$$

Quindi le condizioni iniziali consistenti sono

$$x_0 = \sin(0)$$

$$y_0 = -\cos(0)$$



## Metodo di Eulero esplicito

Consideriamo la ODE  $x' = f(x, t)$ , il metodo di Eulero esplicito prende la forma

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k, t_k)$$

Applicato alla DAE risulta in ( $t_k = kh$ )

$$0 = h(\sin(t_k) - x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - hy_k$$

Non è un metodo applicabile, non si ottiene  $y_{k+1}$ .



## Metodo di Eulero implicito

Per  $x' = f(x, t)$ , il metodo di Eulero implicito prende la forma

$$x_{k+1} - hf(x_{k+1}, t_{k+1}) = x_k$$

Applicato alla DAE risulta in ( $t_k = kh$ )

$$h(\sin(t_{k+1}) - x_{k+1}) = 0$$

$$x_{k+1} + hy_{k+1} = x_k$$

Da cui segue

$$x_{k+1} = \sin(t_{k+1})$$

$$y_{k+1} = (x_k - \sin(t_{k+1}))/h$$

$$= (\sin(t_k) - \sin(t_{k+1}))/h = -\cos(t_{k+1}) + \mathcal{O}(h)$$



## Metodo di Crank-Nicolson

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = \frac{f(x_{k+1}, t_{k+1}) + f(x_k, t_k)}{2}$$

Applicato alla DAE risulta in

$$\sin(t_{k+1}) - x_{k+1} = x_k - \sin(t_k)$$

$$x_{k+1} - \frac{h}{2}y_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}y_k$$

Da cui segue

$$x_{k+1} = \sin(t_{k+1}) + \sin(t_k) - x_k$$

$$y_{k+1} = \frac{2}{h}(x_k - x_{k+1}) - y_k$$

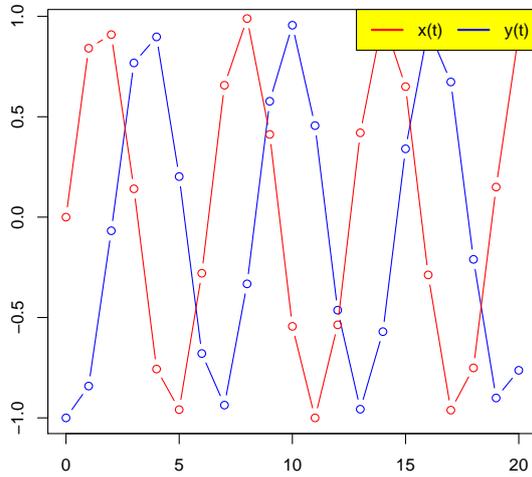
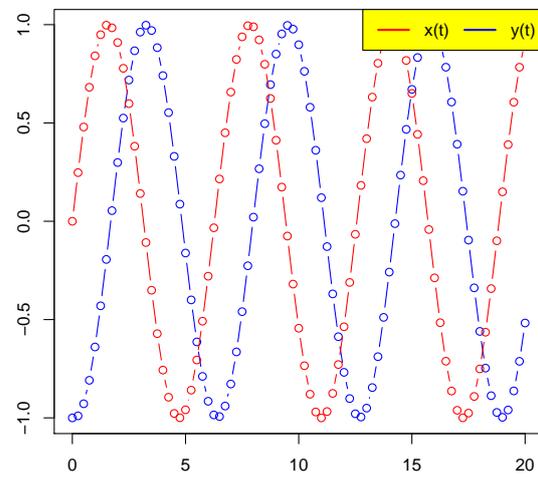
Inoltre risolvendo la relazione per  $x_k$

$$x_k = \sin(t_k) + (-1)^k x_0$$



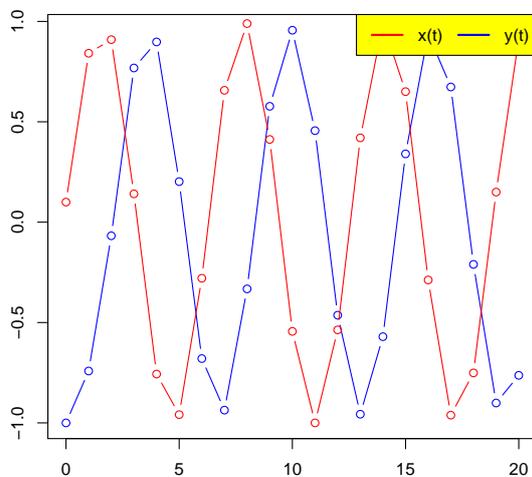
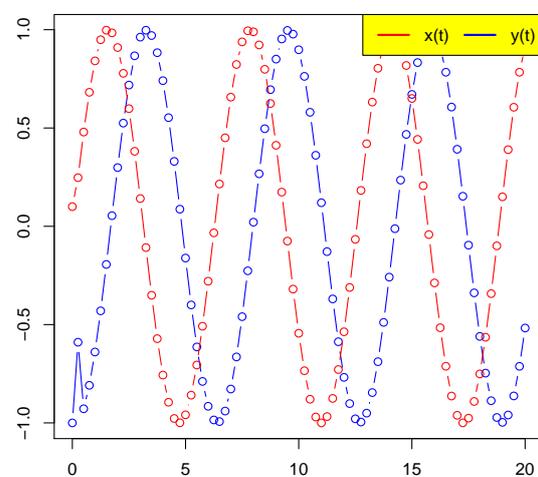
## Risultati con Eulero implicito

Dato iniziale consistente  $x_0 = 0$  ed  $y_0 = -1$ .

Metodo di Eulero Implicito  $h=1$ Metodo di Eulero Implicito  $h=0.25$ 

## Risultati con Eulero implicito

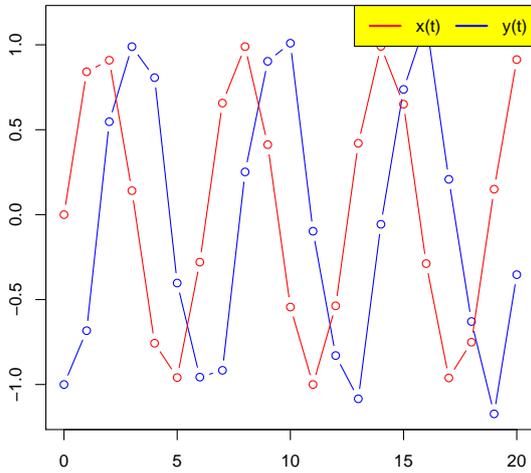
Dato iniziale **inconsistente**  $x_0 = 0.1$  ed  $y_0 = -1$

Metodo di Eulero Implicito  $h=1$ Metodo di Eulero Implicito  $h=0.25$ 

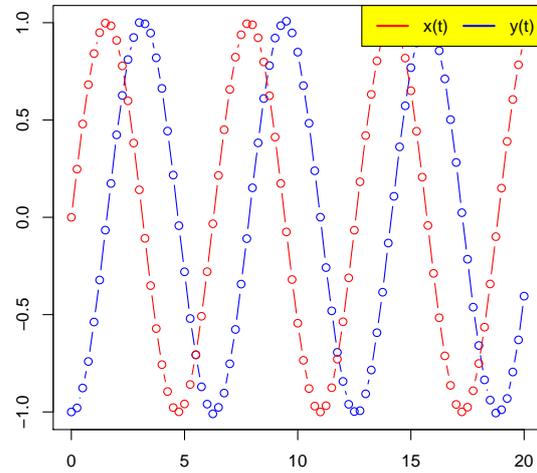
# Risultati con Crank-Nicolson

Dato iniziale consistente  $x_0 = 0$  ed  $y_0 = -1$

Metodo di Crank-Nicolson  $h=1$



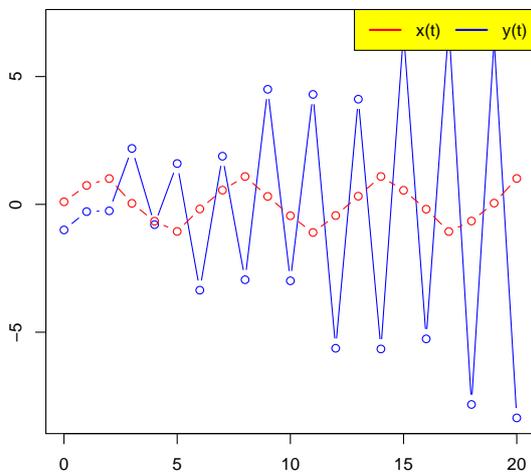
Metodo di Crank-Nicolson  $h=0.25$



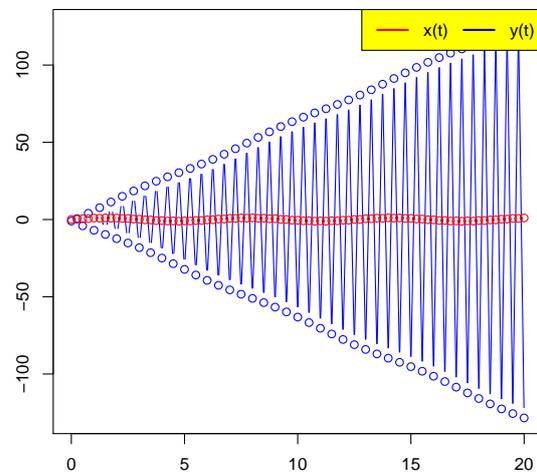
# Risultati con Crank-Nicolson

Dato iniziale **inconsistente**  $x_0 = 0.1$  ed  $y_0 = -1$

Metodo di Crank-Nicolson  $h=1$



Metodo di Crank-Nicolson  $h=0.25$



## Un esempio semplice

Stabilizzazione alla Baumgarten

Ri-consideriamo la DAE

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

e stabilizziamo il vincolo  $x(t) - \sin(t) = 0$  alla Baumgarten

$$\tau(x(t) - \sin(t))' + (x(t) - \sin(t)) = 0$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

### Osservazione

L'equazione  $\tau z'(t) + z(t) = 0$  ha come soluzione

$$z(t) = z(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

e  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$

## Un esempio semplice

Stabilizzazione alla Baumgarten

Discretizzando con Crank-Nicolson

$$\frac{\tau}{h}(x_{k+1} - x_k) - \frac{\tau}{h}(\sin(t_{k+1}) - \sin(t_k)) +$$

$$\frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k) - \frac{1}{2}(\sin(t_{k+1}) + \sin(t_k)) = 0$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} + \frac{y_{k+1} + y_k}{2} = 0$$

e risolvendo rispetto a  $x_{k+1}$  e  $y_{k+1}$

$$x_{k+1} = \frac{2\tau - h}{2\tau + h}(x_k - \sin(t_k)) + \sin(t_{k+1})$$

$$y_{k+1} = \frac{\sin(t_k)(4\tau - 2h) - \sin(t_{k+1})(4\tau + 2h) + 4hx_k}{h(2\tau + h)} - y_k$$

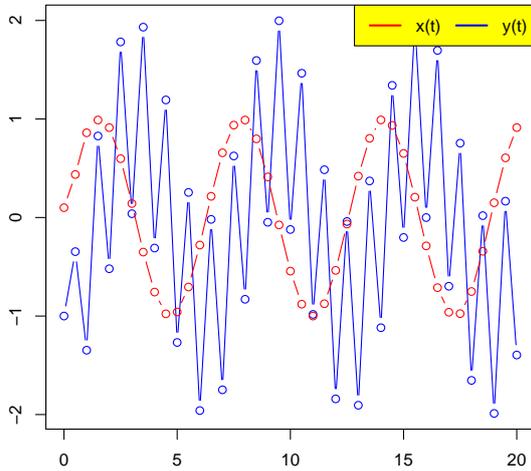


# Risultati con Crank-Nicolson

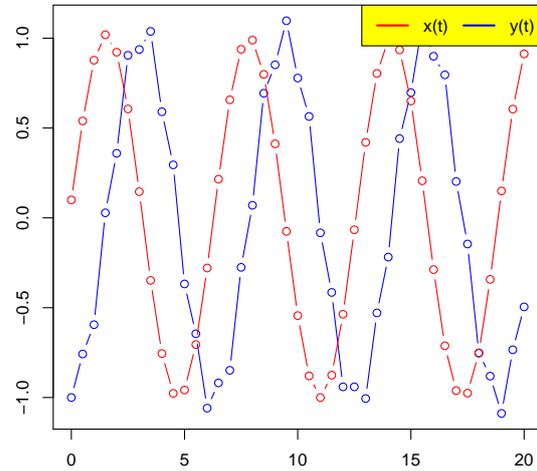
Stabilizzazione alla Baumgarten

Dato iniziale **inconsistente**  $x_0 = 0.1$  ed  $y_0 = -1$

**Crank-Nicolson Stabilizzato  $h=0.5$   $\tau=0.1$**



**Crank-Nicolson Stabilizzato  $h=0.5$   $\tau=1$**

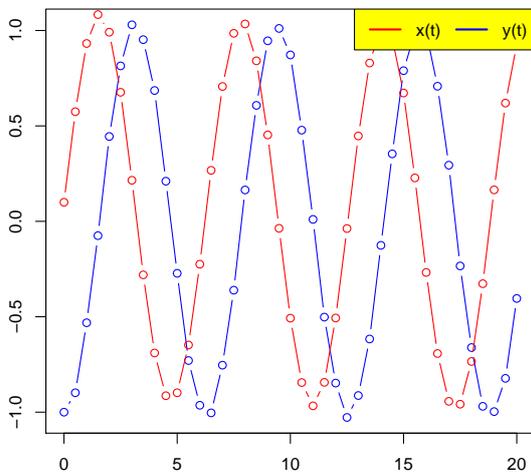


# Risultati con Crank-Nicolson

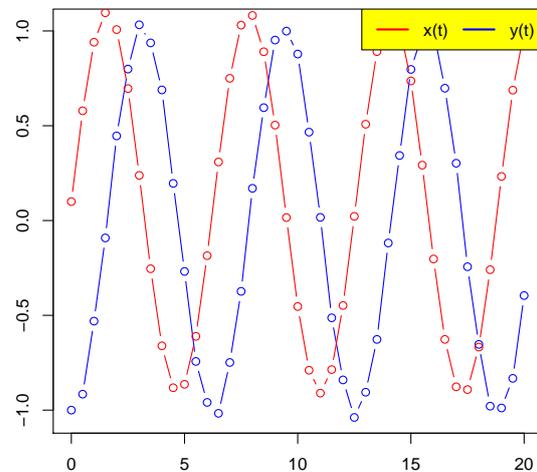
Stabilizzazione alla Baumgarten

Dato iniziale **inconsistente**  $x_0 = 0.1$  ed  $y_0 = -1$

**Crank-Nicolson Stabilizzato  $h=0.5$   $\tau=10$**



**Crank-Nicolson Stabilizzato  $h=0.5$   $\tau=100$**



## Commenti

- Il metodo di Eulero implicito sembra funzionare anche con dati inconsistenti
- Il metodo di Crank-Nicolson non funziona se i dati iniziali sono inconsistenti
- La stabilizzazione alla Baumgarten funziona bene ma non esiste una ricetta generale per determinare a priori  $\tau$ !



## Il pendolo semplice

### Le equazioni

Consideriamo una massa  $m$  vincolata a stare su una circonferenza  $x^2 + y^2 = r^2$ . La sua lagrangiana e il vincolo diventano

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

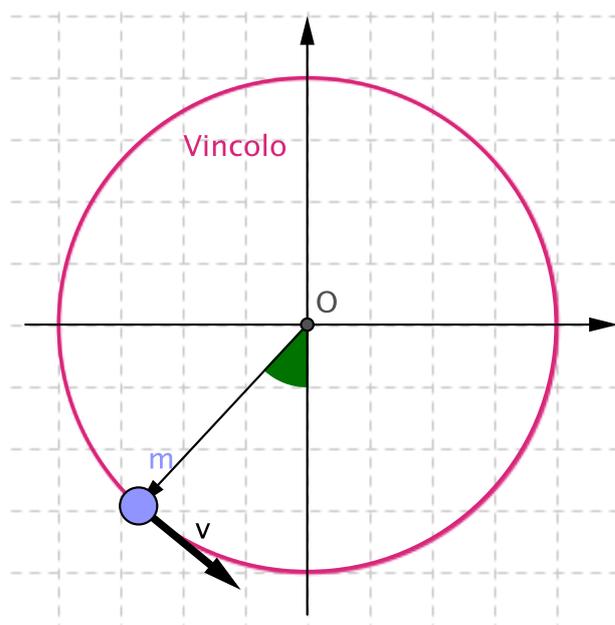
$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

e le equazioni del moto diventano

$$m\ddot{x} + 2x\lambda = 0$$

$$m\ddot{y} + 2y\lambda + mg = 0$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



## Calcolo dell'indice

(1/2)

Dividendo per  $m$  e ponendo  $\mu = -2\lambda/m$  le equazioni diventano

$$\ddot{x} = \mu x$$

$$\ddot{y} = \mu y - g$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ponendo  $u = \dot{x}$  e  $v = \dot{y}$  trasformiamo il sistema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



## Calcolo dell'indice

(2/2)

Derivando una prima volta il vincolo

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0 \implies xu + yv = 0$$

Derivando una seconda volta il vincolo

$$x\dot{u} + y\dot{v} + \dot{x}u + \dot{y}v = 0 \implies$$

$$\mu(x^2 + y^2) - gy + (u^2 + v^2) = 0 \implies r^2\mu - gy + (u^2 + v^2) = 0$$

Derivando una terza volta otteniamo l'equazione differenziale per  $\mu$

$$r^2\dot{\mu} - gv + 2(u\dot{u} + v\dot{v}) = 0 \implies$$

$$r^2\dot{\mu} - gv + 2\mu(ux + vy) - 2gv = 0 \implies$$

$$r^2\dot{\mu} - 3gv = 0$$

la DAE ha indice 3



## DAE con i vincoli

DAE originaria

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Vincoli nascosti

$$xu + yv = 0$$

$$r^2\mu - gy + (u^2 + v^2) = 0$$

Equazione differenziale associata al vincolo

$$r^2\dot{\mu} - 3gv = 0$$



## Integro la ODE senza stabilizzazione

Consideriamo la ODE senza stabilizzazione

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$\dot{\mu} = 3gv/r^2$$

Integrando ad esempio con Eulero  
Implicito otteniamo le seguenti equazioni

alle differenze

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \mu_{k+1} x_{k+1}$$

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{h} = \mu_{k+1} y_{k+1} - g$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = u_{k+1}$$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = v_{k+1}$$

$$\frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{h} = \frac{3gv_{k+1}}{r^2}$$



## Integro la ODE senza stabilizzazione

Risolviendo le prime 4 equazioni per  $x_{k+1}$ ,  $y_{k+1}$ ,  $u_{k+1}$  e  $v_{k+1}$  otteniamo

$$c_{k+1} = 1 - h^2 \mu_{k+1}$$

$$x_{k+1} = (x_k + hu_k)/c_{k+1}$$

$$y_{k+1} = (y_k + hv_k - gh^2)/c_{k+1}$$

$$u_{k+1} = (u_k + h\mu_{k+1}x_k)/c_{k+1}$$

$$v_{k+1} = (v_k + h\mu_{k+1}y_k - gh)/c_{k+1}$$

e sostituendo nella equazione del moltiplicatore e ponendo  $\delta = \mu_{k+1} - \mu_k$  otteniamo una equazione quadratica in  $\delta$  da risolvere:

$$r^2 h^2 \delta^2 + (3gh^2 y_k + r^2 (h^2 \mu_k - 1)) \delta + 3gh(v_k + y_k \mu_k h - gh) = 0$$

Poichè  $\delta$  deve essere Tra le due soluzioni scegliamo quella più vicina al passo esplicito cioè  $\delta \approx 3hgv_k/r^2$



## Integro la DAE senza stabilizzazione

Il metodo di Eulero implicito senza stabilizzazione semplicemente non funziona e da risultati sballati. Il fatto è che subito viene violato il vincolo  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Consideriamo la DAE senza stabilizzazione

$$\dot{u} = \mu x$$

$$\dot{v} = \mu y - g$$

$$\dot{x} = u$$

$$\dot{y} = v$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Integrando ad esempio con Eulero Implicito otteniamo le seguenti equazioni

alle differenze

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} = \mu_{k+1} x_{k+1}$$

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{h} = \mu_{k+1} y_{k+1} - g$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = u_{k+1}$$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = v_{k+1}$$

$$x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = r^2$$



## Integro la ODE senza stabilizzazione

Risolvendo le prime 4 equazioni per  $x_{k+1}$ ,  $y_{k+1}$ ,  $u_{k+1}$  e  $v_{k+1}$  otteniamo ancora

$$c_{k+1} = 1 - h^2 \mu_{k+1}$$

$$x_{k+1} = (x_k + hu_k)/c_{k+1}$$

$$y_{k+1} = (y_k + hv_k - gh^2)/c_{k+1}$$

$$u_{k+1} = (u_k + h\mu_{k+1}x_k)/c_{k+1}$$

$$v_{k+1} = (v_k + h\mu_{k+1}y_k - gh)/c_{k+1}$$

e sostituendo nella equazione del vincolo una equazione quadratica in  $\mu_{k+1}$  da risolvere:

$$\begin{aligned} & x_k^2 + y_k^2 - r^2 + 2h(x_k u_k + y_k v_k) + h^2(u_k^2 + v_k^2) \\ & + g^2 h^4 - 2gh^2(y_k + hv_k) + 2h^2 \mu_{k+1} - h^4 \mu_{k+1}^2 = 0 \end{aligned}$$



## Integro la ODE senza stabilizzazione

$$\begin{aligned} & \underbrace{[x_k^2 + y_k^2 - r^2]}_A + 2h \underbrace{(x_k u_k + y_k v_k)}_B + h^2(u_k^2 + v_k^2) \\ & + g^2 h^4 - 2gh^2(y_k + hv_k) + 2h^2 \mu_{k+1} - h^4 \mu_{k+1}^2 = 0 \end{aligned}$$

Poiché nel discreto il vincolo è risolto esattamente il blocco (A) può essere messo a 0. Il blocco (B) rappresenta la derivata del vincolo che non necessariamente è 0 nel discreto. Otteniamo quindi

$$2(x_k u_k + y_k v_k) + h(u_k^2 + v_k^2) + g^2 h^3 - 2gh(y_k + hv_k) + 2h\mu_{k+1} - h^3 \mu_{k+1}^2 = 0$$

Risolvendo la quadratica

$$\mu_{k+1} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + A}}{h^2 r}$$

$$A = g^2 h^4 + 2h(x_k u_k + y_k v_k) - 2gh^2(y_k + hv_k) + h^2(u_k^2 + v_k^2)$$



## Integro la ODE senza stabilizzazione

Poiché  $\mu$  rappresenta la forza centripeta che mantiene la massa sul vincolo so già che devo scegliere la soluzione negativa e quindi Risolvendo la quadratica per la radice negativa e riscrivendo in modo da evitare cancellazioni otteniamo

$$A = g^2 h^4 + 2h(x_k u_k + y_k v_k) - 2gh^2(y_k - hv_k) + h^2(u_k^2 + v_k^2)$$

$$\mu_{k+1} = \frac{-A}{h^2(r^2 + r\sqrt{r^2 + A})} = \frac{-A/r^2}{h^2(1 + \sqrt{1 + A/r^2})}$$

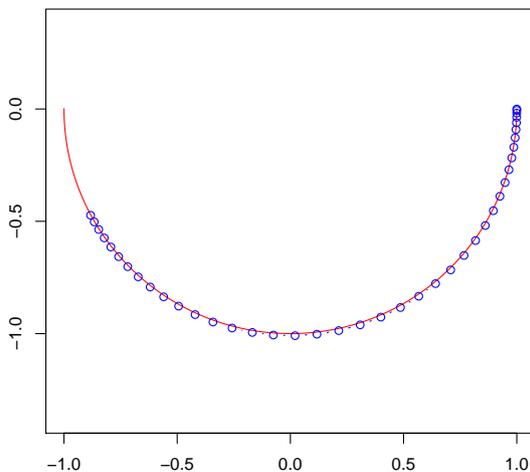


## Risultati con Eulero-Implicito

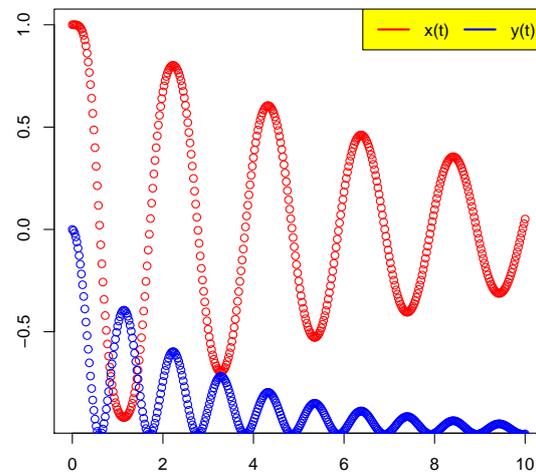
DAE integrata senza stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**  $x_0 = 1, y_0 = 0, u_0 = 0, v_0 = 0$

Metodo di Eulero Implicito  $h=0.025$



Metodo di Eulero Implicito  $h=0.025$

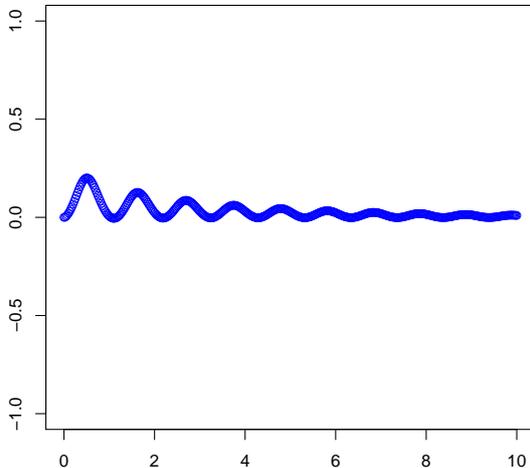


# Risultati con Eulero-Implicito

DAE integrata senza stabilizzazione

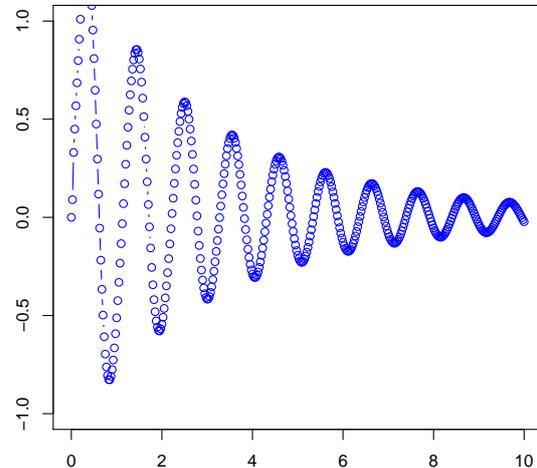
Dato iniziale **consistente**  $x_0 = 1, y_0 = 0, u_0 = 0, v_0 = 0$

Primo vincolo nascosto  $h=0.025$



$$x_k u_k + y_k v_k$$

Secondo vincolo nascosto  $h=0.025$



$$r^2 \mu_k - g y_k + u_k^2 + v_k^2$$



# Un esempio complicato

Stabilizzazione alla Baumgarten

Il metodo di Eulero implicito senza stabilizzazione funziona ma è troppo dissipativo. Per poter utilizzare il metodo di Cranck-Nicolson bisogna stabilizzare i vincoli. Poiché la DAE è di indice 3 dovremmo stabilizzare il vincolo con una equazione del terzo ordine come segue:

$$\frac{d^3 V(x, y)}{dt^3} + a \frac{d^2 V(x, y)}{dt^2} + b \frac{dV(x, y)}{dt} + c V(x, y) = 0$$

dove  $V(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$ . Dove  $a, b, c$  sono scelti in modo che

$$z'''(t) + a z''(t) + b z'(t) + c z(t) = 0$$

abbia  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ .

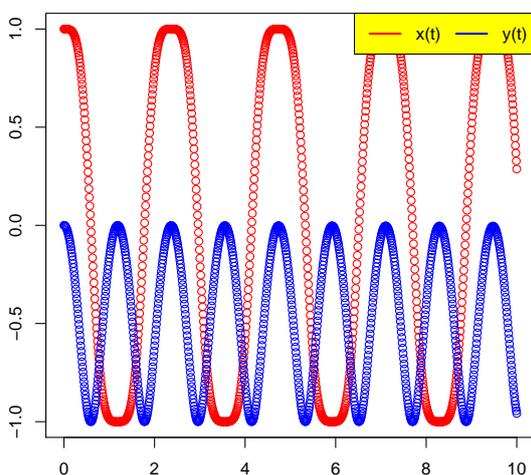


# Risultati con Crank-Nicolson stabilizzato

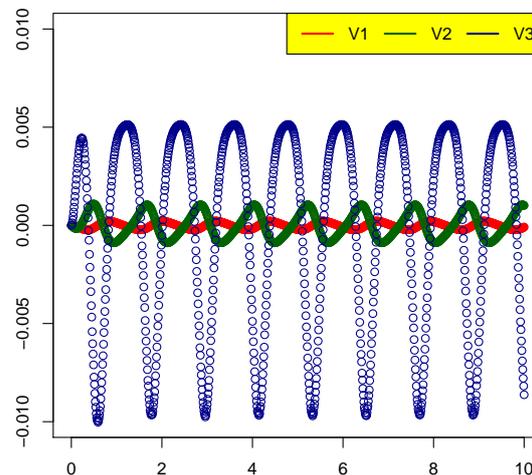
DAE integrata senza stabilizzazione

Dato iniziale **consistente**  $x_0 = 1, y_0 = 0, u_0 = 0, v_0 = 0$ . Valori di stabilizzazione  $a = 30, b = 300, c = 1000$ .

Crank-Nicolson stabilizzato



Vincoli Nascosti



## Bibliografia

-  J. García de Jalón and E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real-Time Challenge*  
 Springer-Verlag, New-York, 1994  
<http://mat21.etsii.upm.es/mbs/bookPDFs/bookGjB.htm>
-  Joachim W. Baumgarte, *Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems*,  
 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 1, pp. 1-16, (1972).
-  Joachim W. Baumgarte, *Stabilization by modification of the Lagrangian*  
 Celestial Mechanics, vol 13, pp. 247–251, (1976),