L'indice differenziale di una DAE

(Metodi Matematici e Calcolo per Ingegneria)

Enrico Bertolazzi

DIMS – Università di Trento

anno accademico 2007/2008

Outline

Riduzione del sistema al primo ordine

Conviene trasformare il sistema (DAE.1)–(DAE.2) dal secondo ordine al primo ponendo $\boldsymbol{p}(t) = \dot{\boldsymbol{q}}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, t)^T \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}, t) &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere come (DAE semi esplicita di indice 3)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \\ \dot{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}, t) \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}, t)$ e

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x})^{-1} \left[\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, t)^T \boldsymbol{\lambda}\right]$$

DAE Lineari

Prima di imbarcarci nello studio delle DAE generali conviene vedere cosa succede nei casi semplici ad esempio quando le equazioni sono lineari.
Consideriamo ad esempio la seguente DAE lineare

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{h}(t)$$

dove se $\boldsymbol{F}$ è non singolare otteniamo di nuovo un ODE (Ordinary Differential Equation). Dovremo mettere delle condizioni su $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{G}$ altrimenti ci troveremo in casi patologici (ad esempio $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$).

Se ad esempio

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

questo ponendo $\boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))^T$ corrisponde alla singola equazione differenziale

$$x'(t) = y(t)$$

che come soluzione

$$x(t) = \int_0^t g(z)\,\mathrm{d}z, \qquad y(t) = g(t)$$

dove $g(t)$ è una funzione arbitraria che soddisfa le condizioni iniziali. Serve quindi una condizione per avere esistenza e unicità almeno nel caso lineare.

Definizione

La coppia di matrici $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ sono un Pencil Regolare se esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$det\,(\lambda \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \neq 0$$

Teorema (Kroneker)

Se $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ sono un Pencil Regolare allora esistono due matrici $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ non singolari tali che

$$\boldsymbol{UAV} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{UBV} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

Le matrici $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{C}$ sono nella forma normale di Jordan e $\boldsymbol{N}$ ha autovalori tutti nulli.

Ovviamente i blocchi corrispondenti nelle matrici partizionate hanno le stesse dimensioni.

Di fatto le matrici $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{C}$ hanno la seguente forma

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{J}_{d_1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}'_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{J}'_{d_2} \end{pmatrix}$$

ed i blocchi $\boldsymbol{J}_k$ e $\boldsymbol{J}'_k$ hanno la forma

$$\boldsymbol{J}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}'_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

inoltre la matrice $\boldsymbol{N}$ è nilpotente cioè esiste un $p > 0$ finito tale che $\boldsymbol{N}^{p-1} \neq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{N}^p = \boldsymbol{0}$. Questo fatto verrà sfruttano per definite l'indice di Kroneker.

Osservazione

Per come è definita si ha sempre $p \geq 2$.

Torniamo ora alla DAE lineare

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{h}(t)$$

Se $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G})$ è un pencil regolare allora usando $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ che mi portano il pencil alla forma normale otteniamo

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{F}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x}'(t) + \boldsymbol{U}\boldsymbol{G}\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{U}\boldsymbol{h}(t)$$

ponendo $(\boldsymbol{u}(t); \boldsymbol{v}(t)) = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ ed $(\boldsymbol{a}(t); \boldsymbol{b}(t)) = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{h}(t)$ possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}'(t) \\ \boldsymbol{v}'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}(t) \\ \boldsymbol{b}(t) \end{pmatrix}$$

o meglio

$$\boldsymbol{u}'(t) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{a}(t)$$

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{b}(t)$$

Soluzione di $\boldsymbol{u}'(t) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{a}(t)$

L'equazione differenziale

$$\boldsymbol{u}'(t) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{a}(t)$$

ha formalmente la seguente soluzione tramite la matrice esponenziale

$$\boldsymbol{u}(t) = \exp(-\boldsymbol{C}t)\boldsymbol{u}(0) + \int_0^t \exp(\boldsymbol{C}(s-t))\boldsymbol{a}(s)\mathrm{d}s$$

dove

$$\exp \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{6}\boldsymbol{A}^3 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k + \cdots$$

Soluzione di $\boldsymbol{N}\boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{b}(t)$

L'equazione differenziale

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{b}(t)$$

è ancora una DAE ma la matrice $\boldsymbol{N}$ è nilpotente, possiamo allora considerare le sue derivate

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{b}(t) - \boldsymbol{N}\boldsymbol{v}'(t) \\
&= \boldsymbol{b}(t) - \boldsymbol{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{b}(t) - \boldsymbol{N}\boldsymbol{v}'(t)) = \boldsymbol{b}(t) - \boldsymbol{N}\boldsymbol{b}'(t) + \boldsymbol{N}^2\boldsymbol{v}''(t) \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\boldsymbol{N}^k\boldsymbol{b}^{(k)}(t) - (-1)^n\boldsymbol{N}^n\boldsymbol{v}^{(n)}(t)
\end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che $\boldsymbol{N}$ è nilpotente per $n = q$ abbiamo $\boldsymbol{N}^q = \boldsymbol{0}$ e quindi

$$\boldsymbol{v}(t) = \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \boldsymbol{N}^k \boldsymbol{b}^{(k)}(t)$$

Di fatto abbiamo dovuto fare $q - 1$ derivate per eliminare la dipendenza circolare di $\boldsymbol{v}(t)$ con le sue derivate. In questo modo abbiamo calcolato la soluzione $v(t)$. Se facciamo una ulteriore derivata otteniamo una equazione differenziale ordinaria.

$$\boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{f}(t) = -\sum_{k=1}^{q} (-1)^k \boldsymbol{N}^k \boldsymbol{b}^{(k)}(t)$$

Di fatto q è il numero minimo di derivate della DAE (o parte della stessa) che devo fare per trasformare la DAE in una ODE. Questo numero prende il nome di Indice di Kroneker. Generalizzando questa idea al caso non lineare otterremo l'indice differenzale della DAE.

Soluzione generale

Ricordando che $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}(t); \boldsymbol{v}(t))$ otteniamo è ancora una DAE ma la matrice $\boldsymbol{N}$ è nilpotente, possiamo allora considerare le sue derivate

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{V}\begin{pmatrix} \exp(-\boldsymbol{C}t)\boldsymbol{u}(0) + \int_0^t \exp(\boldsymbol{C}(s-t))\boldsymbol{a}(s)\mathrm{d}s \\ \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \boldsymbol{N}^k \boldsymbol{b}^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

Inoltre la condizione iniziale di $\boldsymbol{v}(0)$ è determinata e non si può fissare liberamente:

$$\boldsymbol{v}(0) = \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \boldsymbol{N}^k \boldsymbol{b}^{(k)}(0)$$

questo implica a sua volta che non posso fissare $\boldsymbol{x}(0)$ liberamente.

L'indice Differenziale di una DAE

Consideriamo la seguente generica DAE

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}(t), t) = \boldsymbol{0}$$

in generale $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}'}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}(t), t)$ è singolare e quindi non è possibile ricavare $\boldsymbol{x}'(t)$ e ottenere una ODE. Se consideriamo però il le seguenti derivate successive

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}(t), t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}'}\boldsymbol{x}''(t) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}'(t) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} \\
\boldsymbol{0} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}(t), t) \\
&\vdots \\
\boldsymbol{0} &= \frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}t^q}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}(t), t)
\end{aligned}$$

potremmo trovare una selezione di righe che permetto di ricavare $\boldsymbol{x}'(t)$ come funzione di $\boldsymbol{x}(t)$ e t.

L'indice Differenziale di una DAE

Ad esempio se consideriamo la seguente DAE

$$x(t) = \sin(t)$$

$$x'(t) + y(t) = 0$$

una prima derivata

$$x'(t) = \cos(t)$$

$$x''(t) + y'(t) = 0$$

permette di ricavare $y'(t) = -x''(t)$. Una seconda derivata

$$x''(t) = -\sin(t)$$

$$x'''(t) + y''(t) = 0$$

permette di ricavare $x''(t) = -\sin(t)$ e quindi $y'(t) = \sin(t)$.

L'indice Differenziale di una DAE

Definizione (Indice differenziale)

Data una DAE $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}(t), t) = \boldsymbol{0}$ diremo che ha indice differenziale q se il seguente sistema di derivate

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}(t), t) &= \boldsymbol{0} \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}(t), t) &= \boldsymbol{0} \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}t^q}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{x}(t), t) &= \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

è il più piccolo sistema che permette di ricavare $\boldsymbol{x}'(t)$ in funzione di $\boldsymbol{x}(t)$ e t.

DAE in forma semi-esplicita

Una DAE in generale si scrive come

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{0}$$

dove

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}'} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}, t)$$

è matrice singolare. Conviene considerare però delle classi di DAE in una forma meno generale ma utile nelle applicazioni. Ad esempio

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)$$

dove $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ è matrice singolare. Esistono però in letteratura delle forme particolari semi-esplicite per le DAE di indice 0, 1, 2 e 3.

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 0 e 1

Una DAE di indice 0 per definizione è una ODE, una DAE di indice 1 in forma semi esplicita è la seguente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+1}, \mathbb{R}^n)$ e $\boldsymbol{g} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+1}, \mathbb{R}^m)$. Inoltre $\boldsymbol{g}$ deve essere regolare cioè

$$\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial \boldsymbol{y}}$$

è matrice non singolare. In questo caso applicando il teorema della funzione implicita (vedi prossimo lucido) possiamo determinare $\boldsymbol{y}$ in funzione di $\boldsymbol{x}$ e quindi ottenere una ODE:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}(t), t), t)$$

Teorema della funzione implicita

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ aperto e $\boldsymbol{f} \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$ sia inoltre

1. $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in A$;
2. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$;
3. $\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)}{\partial \boldsymbol{y}}$ *non singolare.*

Allora esistono due aperti $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ e una funzione $\boldsymbol{\phi} : U \mapsto V$ tali che

- $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}_0)$;
- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ *e solo se* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ *(per $\boldsymbol{x} \in U$ e $\boldsymbol{y} \in V$);*
- $\boldsymbol{\phi} \in C^1(U, V)$ *e vale*

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}}$$

DAE in forma semi-esplicita
DAE di indice 2 (1/3)

Una DAE di indice 1 di fatto è una ODE con dei parametri da determinare implicitamente, ben diversa è la natura della DAE di indice 2

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+1}, \mathbb{R}^n)$ e $\boldsymbol{g} \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^m)$. Inoltre

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \times \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial \boldsymbol{y}}$$

è matrice non singolare. In questo caso non possiamo applicare il teorema della funzione implicita per determinare $\boldsymbol{y}$ in funzione di $\boldsymbol{x}$.

DAE in forma semi-esplicita
DAE di indice 2 (2/3)

Per verificare l'indice deriviamo una prima volta il vincolo

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), t)}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}'(t) + \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), t)}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

e da questo otteniamo il nuovo vincolo (nascosto)

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = \boldsymbol{0}$$

dove

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}$$

Otteniamo cosi la nuova DAE

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \end{aligned}$$

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 2

(3/3)

Avendo derivato una volta il vincolo questa DAE dovrebbe essere di indice 1

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \end{aligned}$$

per verificarlo deve essere

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \times \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial \boldsymbol{y}}$$

non singolare

DAE in forma semi-esplicita

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 3

(1/3)

Una DAE di indice 3 semi esplicita prende la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, t) \\ \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}, t) \end{aligned}$$

dove

$$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n \qquad \boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m \qquad \boldsymbol{z}(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$\boldsymbol{f} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+p+1}, \mathbb{R}^n) \quad \boldsymbol{g} \in C^1(\mathbb{R}^{n+m+1}, \mathbb{R}^m) \quad \boldsymbol{h} \in C^1(\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{R}^n)$$

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 3

(2/3)

Per verificare l'indice deriviamo una prima volta il vincolo

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}(t),t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}(t),t)}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}'(t) + \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}(t),t)}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

e da questo otteniamo il nuovo vincolo (nascosto)

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{0}$$

dove

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y},t)}{\partial \boldsymbol{y}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) + \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y},t)}{\partial t}$$

Otteniamo cosi la nuova DAE

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},t) \\ \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \end{aligned}$$

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice 3

(3/3)

La DAE

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},t) \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$$

è di indice 2 se

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial \boldsymbol{x}} \times \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},t)}{\partial \boldsymbol{z}} + \frac{\partial \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial \boldsymbol{y}} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial \boldsymbol{z}}$$

è non singolare, cioè

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y},t)}{\partial \boldsymbol{y}} \times \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial \boldsymbol{x}} \times \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},t)}{\partial \boldsymbol{z}}$$

è non singolare.

DAE in forma semi-esplicita

DAE di indice μ (nella forma di Hessemberg)

La DAE

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1' &= \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_\mu, t) \\ \boldsymbol{x}_2' &= \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{\mu-1}, t) \\ &\vdots \\ \boldsymbol{x}_k' &= \boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_k, \dots, \boldsymbol{x}_{\mu-1}, t) \qquad k = 3, \dots, \mu - 1 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{f}_\mu(\boldsymbol{x}_{\mu-1}, t) \end{aligned}$$

dove se

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_\mu}{\partial \boldsymbol{x}_{\mu-1}} \times \frac{\partial \boldsymbol{f}_{\mu-1}}{\partial \boldsymbol{x}_{\mu-2}} \times \cdots \times \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{x}_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_\mu}$$

è non singolare allora la DAE ha indice μ.

Bibliografia

J. García de Jalón and E. Bayo, *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real-Time Challenge*
Springer-Verlag, New-York, 1994
http://mat21.etsii.upm.es/mbs/bookPDFs/bookGjB.htm